

# EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA A DENSIDADE DE CORRENTE EM FENÔMENO DE EMISSÃO POR CAMPO

Nei Lopes da Silva Júnior<sup>1</sup>; Antônio Vieira de Andrade Neto<sup>2</sup>

1. Bolsista FAPESB, Licenciando em Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: [geloxs@yahoo.com.br](mailto:geloxs@yahoo.com.br)
2. Orientador, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: [aneto@uefs.br](mailto:aneto@uefs.br)

**PALAVRAS-CHAVE:** Efeito túnel, Corrente de emissão por campo, Emissão de elétrons.

## INTRODUÇÃO

Os processos de emissão de elétrons através de superfícies sólidas, como a emissão termiônica e a emissão por campo, são de grande interesse científico e tecnológico. No efeito termiônico, os elétrons são emitidos aquecendo-se o material a temperaturas suficientemente altas (da ordem de 1000 K para metais) e, dessa forma, fornecendo energia aos elétrons para que eles consigam transpor a barreira de potencial que os mantém ligados aos sólidos.

Pode-se também extrair elétrons de um sólido mesmo sem o fornecimento da energia mínima necessária para sua remoção. Isso pode ser feito pela aplicação de um campo elétrico externo suficientemente intenso (da ordem de  $10^7$  V/cm para um metal), o qual reduz a barreira de potencial vista pelo elétron. Esse processo é denominado emissão por campo ou emissão fria.

O efeito físico fundamental desse fenômeno é o tunelamento ou penetração de barreira, que consiste na possibilidade de uma partícula com energia  $E$  penetrar em uma região de energia potencial  $V$ , onde  $E < V$ . Tal efeito, impossível na mecânica clássica, é muito comum em sistemas atômicos e moleculares [1].

Em 1928, Fowler e Nordheim [2] explicaram a emissão de elétrons induzida por campo elétrico de uma superfície metálica como um efeito de tunelamento. A emissão por campo é o princípio fundamental de vários dispositivos de interesse tecnológico. Podemos citar, como exemplo, a invenção em 1936 por E. W. Muller do Microscópio de Emissão por Campo, conhecido pela sigla FEM (da acrossemia em inglês Field Emission Microscope), que tem como princípio básico de funcionamento esse efeito. Desde então, esse fenômeno tem merecido a atenção de vários pesquisadores [3]. Mais recentemente, abriu-se a perspectiva da utilização de nanotubos de carbono em dispositivos de emissão por campo.

Neste trabalho apresentamos uma abordagem teórica do fenômeno de emissão por campo de superfícies sólidas, particularmente de superfícies metálicas. A probabilidade de penetração da barreira foi calculada usando a aproximação semiclássica ou JWKB (devido a Jeffreys, Wentzel, Kramers e Brillouin). Utilizamos dois modelos de potenciais unidimensionais que levam em conta o potencial imagem [4]. No primeiro modelo separamos em regiões distintas as contribuições do potencial imagem e do campo elétrico, o que facilita a resolução das integrais resultantes. No segundo modelo, que é o análogo unidimensional do modelo realista em três dimensões, a energia potencial coulombiana entre as cargas imagens é considerada em todo o espaço. Apesar de sua grande relevância teórica, a probabilidade de penetração de barreira não é uma quantidade física determinada experimentalmente. Uma grandeza física de grande interesse é a densidade de corrente eletrônica, pois o seu valor teórico pode ser comparado com o seu valor experimental.

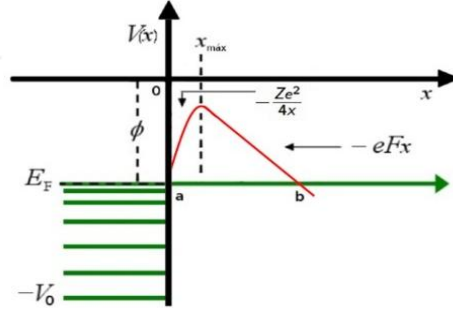
## METODOLOGIA

O presente trabalho tem como objetivo principal calcular a densidade de corrente de emissão por campo. Para realizar esse cálculo é necessário conhecer a probabilidade de penetração de barreira do elétron no interior do metal. Essa probabilidade de transmissão foi calculada usando o método JWKB, o qual fornece a seguinte expressão para essa grandeza,

$$P = \exp \left[ -2 \int_a^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E]} dx \right] , \quad (1)$$

onde  $m$  é a massa do elétron,  $\hbar$  é a constante de Planck,  $E$  e  $V(x)$  são, respectivamente, a energia total e a energia potencial da partícula e  $a$  e  $b$  são os pontos de retorno.

O cálculo da equação acima foi realizado para dois modelos de energia potencial [4-5]. No modelo 1 separamos em regiões distintas as influências do campo elétrico e do potencial imagem, conforme mostrado na figura 1.

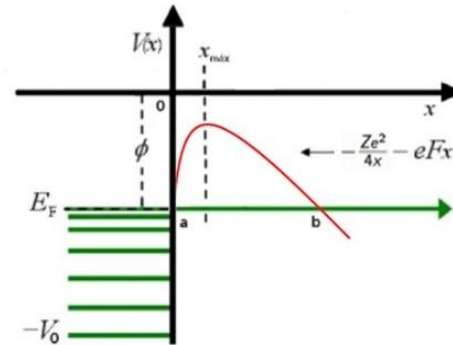


**Figura 1:** Modelo separando a contribuição do potencial imagem e do campo elétrico, onde  $E_F$  é a Energia de Fermi,  $V_0$  a profundidade do poço de potencial,  $x_{m\acute{a}x}$  o ponto até onde o potencial imagem atua e  $a$  e  $b$  são os pontos de retorno.

Próximo à superfície a influência do potencial imagem predomina em comparação com a do campo elétrico no potencial total, ocorrendo o inverso à medida que nos afastamos da superfície. Desse modo, próximo à superfície, utilizamos apenas o potencial imagem e a partir do máximo, a barreira decresce linearmente. Temos, então, a seguinte expressão para a probabilidade de tunelamento [4-5]:

$$P_1 = \left| \frac{1}{\sqrt{\frac{2\phi}{\sqrt{e^3 F \sqrt{Z}}}} - 1} \sqrt{\frac{2\phi}{\sqrt{e^3 F \sqrt{Z}}}} \right|^{\left( \frac{Ze^2}{2\hbar} \sqrt{\frac{2m}{\phi}} \right)} \exp \left\{ \frac{-\sqrt{2m}}{\hbar} \left( \frac{\phi}{eF} - \frac{e\sqrt{Z}}{2\sqrt{eF}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ e\sqrt{Z} + \frac{4\sqrt{eF}}{3} \left( \frac{\phi}{eF} - \frac{e\sqrt{Z}}{2\sqrt{eF}} \right) \right] \right\} \quad (2)$$

O modelo 2 é o análogo unidimensional do potencial real em três dimensões para uma superfície plana (figura 2).



**Figura 2:** Modelo considerando o potencial imagem atuando em todo o espaço.

Para esse modelo encontramos a seguinte expressão para a probabilidade de tunelamento [4-5]:

$$P_2 = \left( \frac{8\phi}{\sqrt{e^3 F Z}} \right)^{\left[ \frac{\sqrt{2m}\phi Ze^3 F}{\hbar e F} \left( 1 + \frac{Ze^3 F}{12\phi^2} \right) \right]} \exp \left\{ \frac{-4\sqrt{2m}\phi}{3\hbar e F} \left[ 1 + \frac{Ze^3 F}{16\phi^2} \left( \frac{Ze^3 F}{2\phi^2} - 1 \right) \right] \right\} \quad (3)$$

Calculadas as probabilidades de penetração de barreira, podemos determinar a densidade de corrente.  $Z$  é um parâmetro ajustável do modelo que tomamos como 1 para comparar os nossos resultados com outros da literatura [6].

A densidade de corrente  $J$  na direção perpendicular à superfície metálica é dada pela expressão:

$$J = \frac{-2e}{v} \sum_k f(E(k)) P(E) V_x(k) \quad (4)$$

onde  $f(E(k))$  é a distribuição de *Fermi-Dirac*,  $P(E)$  é a probabilidade de penetração de barreira e  $V_x(k)$  é a velocidade do elétron na direção x e o fator 2 é devido a degenerescência do elétron. Assim,  $\vec{J}$  pode ser transformada em:

$$J = \frac{-e}{4\pi^3} \int f(E(k)) P(E) V_x(k) d^3k \quad (5)$$

No limite de baixas temperaturas e elevada intensidade de campo podemos aproximar a distribuição de *Fermi-Dirac* por uma função degrau, onde  $f(E(k))$  será 1 para  $E < E_F$  (Energia de Fermi) e 0 para  $E > E_F$ . Nessa situação a equação acima se torna

$$J = \frac{-em}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{E_F} (E_F - E_x) P(E_x) dE_x \quad (6)$$

onde  $m$  é a massa do elétron e  $\hbar$  é a constante de Planck.

Em baixas temperaturas, a probabilidade  $P(E_x)$  de um elétron atravessar a barreira de potencial será bem maior para níveis de energia próximos ao nível de Fermi, i.e.,  $E_x = E_F$ . Desse modo, podemos expandir o expoente do coeficiente de transmissão nos dois primeiros termos de uma série de potência em torno desse nível. Realizando essa expansão obtemos as seguintes expressões para a densidade de corrente para os modelos 1 e 2:

Para o modelo 1,

$$J_1 = \frac{emA_1P_1}{2\pi^2\hbar^3\eta_1^2} \quad (7)$$

Tal que:

$$A_1 = \left| \frac{1}{\frac{\sqrt{2\phi}}{\sqrt{e^3FZ}} - \frac{\sqrt{2\phi}}{\sqrt{e^3FZ}}} \right| \left( \frac{Ze^2}{2\hbar} \sqrt{\frac{2m}{\phi}} \right); \quad \eta_1 = \left[ \frac{2\sqrt{2m\phi}}{\hbar eF} \left( \varphi(y_0) + \frac{Z}{12} y_0^2 \right) \right]; \quad P_1 = \exp[-g(E_F)];$$

$$g(E_F) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{eF} \varphi(y_0); \quad \varphi(y_0) = 1 - \frac{Z}{16} y_0^2; \quad y_0 = \frac{\sqrt{e^3F}}{\phi};$$

Reescrevendo-a, temos:

$$J_1 = \frac{e^3 F^2 A_1 \exp \left[ -\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{eF} \left( 1 - \frac{Ze^3F}{16\phi^2} \right) \right]}{16\pi^2\hbar\phi \left( 1 + \frac{Ze^3F}{48\phi^2} \right)} \quad (8)$$

E para o modelo 2, obtemos:

$$J_2 = \frac{emA_2P_2}{2\pi^2\hbar^3\eta_2^2} \quad (9)$$

Tal que:

$$A_2 = \left( \frac{8\phi}{\sqrt{e^3FZ}} \right) \left[ \frac{\sqrt{2m}}{\hbar eF} \phi^{\frac{3}{2}} \frac{Ze^3F}{2\phi^2} \left( 1 + \frac{Ze^3F}{12\phi^2} \right) \right]; \quad \eta_2 = \left[ \frac{2\sqrt{2m\phi}}{\hbar eF} \left( \varphi(y_0) - \frac{Z}{12} y_0^2 (Zy_0^2 - 1) \right) \right]; \quad y_0 = \frac{\sqrt{e^3F}}{\phi};$$

$$P_2 = \exp[-g(E_F)]; \quad \varphi(y_0) = 1 + \frac{Z}{16} y_0^2 \left( \frac{Z}{2} y_0^2 - 1 \right); \quad g(E_F) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{eF} \varphi(y_0);$$

Que resulta

$$J_2 = \frac{e^3 F^2 A_2 \exp \left[ -\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{eF} \left( 1 - \frac{Ze^3F}{16\phi^2} + \frac{Z^2 e^6 F^2}{32\phi^4} \right) \right]}{16\pi^2\hbar\phi \left( 1 + \frac{Ze^3F}{48\phi^2} - \frac{5Z^2 e^6 F^2}{96\phi^4} \right)^2} \quad (10)$$

Os valores obtidos para os modelos 1 ( $J_1$ ) e 2 ( $J_2$ ) comparados com os valores teóricos ( $J_L$ ) [6] são apresentados na Tabela 1.

**Tabela 1.** Valores da densidade de corrente

$F \times 10^7 \left[ \frac{V}{cm} \right]$	$\varphi [eV]$		
	3,0	4,5	5,0
1	$J_1 = 0,6 \times 10^{-5}$	$J_1 = 3,8 \times 10^{-20}$	$J_1 = 4,5 \times 10^{-25}$
	$J_2 = 1,7 \times 10^{-5}$	$J_2 = 7,9 \times 10^{-19}$	$J_2 = 8,6 \times 10^{-24}$
	$J_L = 3,5 \times 10^{-5}$	$J_L = *$	$J_L = *$
3	$J_1 = 0,1 \times 10^6$	$J_1 = 1,56$	$J_1 = 3,3 \times 10^{-2}$
	$J_2 = 1,0 \times 10^6$	$J_2 = 22,11$	$J_2 = 0,4$
	$J_L = 2,0 \times 10^6$	$J_L = 40,7$	$J_L = 0,8$
5	$J_1 = 1,1 \times 10^7$	$J_1 = 2,0 \times 10^4$	$J_1 = 2,2 \times 10^3$
	$J_2 = 2,0 \times 10^8$	$J_2 = 2,4 \times 10^5$	$J_2 = 2,1 \times 10^4$
	$J_L = 3,9 \times 10^8$	$J_L = 4,4 \times 10^5$	$J_L = 3,8 \times 10^4$
10	$J_1 = 8,8 \times 10^8$	$J_1 = 3,7 \times 10^7$	$J_1 = 1,1 \times 10^7$
	$J_2 = 1,7 \times 10^{10}$	$J_2 = 3,9 \times 10^8$	$J_2 = 1,1 \times 10^8$
	$J_L = *$	$J_L = 6,8 \times 10^8$	$J_L = 1,8 \times 10^8$

\* Valores não resolvidos de densidade de corrente na literatura [6] devido a integrais elípticas.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Utilizando modelos unidimensionais para a energia potencial de elétrons em um sólido metálico, na presença de um campo elétrico externo, calculamos, via aproximação JWKB, a probabilidade dos elétrons escaparem do metal. Uma grandeza física de grande interesse é a densidade de corrente eletrônica, pois o seu valor teórico pode ser comparado com o seu valor experimental. Desse modo, dedicamos esforços para calcular essa grandeza pelos dois modelos propostos nesse trabalho. Conseguimos expressões analíticas tipo *Fowler-Nordheim*, relativamente gerais. Os resultados obtidos estão sendo analisados detalhadamente, mas, preliminarmente, constatamos uma boa concordância entre nossos resultados e outros disponíveis na literatura [6-7].

### REFERÊNCIAS

- [1] ANDRADE-NETO, A.V; ABREU SILVA, A.. 2009. Efeito Túnel e Microscopia com Resolução Atômica. *In: Caderno de Física da UEFS*, Feira de Santana, vol.7, p.115-132.
- [2] FOWLER, R. G. and NORDHEIM, L. 1928. Electron Emission in Intense Electric Field *Proc. Roy. Soc.* A119: 173-181.
- [3] FORBES, R. G. J. 2010. Modeling electron flow produced by a three-dimensional spatially periodic field emitter. *Appl. Phys.* 108,123301.
- [4] SILVA JUNIOR, N., L.; ANDRADE-NETO, A.V.; 2013. Expressões Analíticas para a probabilidade de Tunelamento em fenômeno de Emissão por Campo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v.35, n.3, 3306.
- [5] SILVA JUNIOR, N., L.; ANDRADE-NETO, A.V.; 2011. Cálculo da probabilidade de penetração de barreira em fenômeno de emissão por campo. *In: XV Seminário de Iniciação Científica da UEFS*, Feira de Santana,
- [6] HAUG, A. 1975. Theoretical Solid State Physics. Volume 1. Pergamon Press. Oxford.
- [7] DOLAN, W.W. 1953. Current Density Tables for Field Emission Theory. *Physical Review*, Vol. 91. nº3. August.