

ESTUDO DA INVARIÂNCIA DE CALIBRE EM TEORIA DE CAMPOS: O CASO NÃO-RELATIVÍSTICO

Letruska Fiana Santiago Gonzaga¹; Milton Souza Ribeiro²

1. Bolsista PROBIC/UEFS, Graduanda em Bacharelado em Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: letruskafiama@hotmail.com
2. Orientador, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: miltaaao@ig.com.br

PALAVRAS-CHAVE: Campos Quânticos, Relatividade Galileana, Partícula Livre.

INTRODUÇÃO

No estudo da dinâmica das interações entre partículas elementares, a teoria quântica de campos fornece a estrutura teórica relevante para a descrição dos campos de forma quantizada. Incluindo os campos de Dirac (de matéria), cuja interação é o elétron ou pósitron, e o de Maxwell (eletromagnético), cuja interação é o fóton. Neste último, verificamos uma relação de simetria nas transformações de calibre, ou seja, conserva a invariância da lagrangeana quando há uma mudança de parâmetro, por exemplo, o potencial vetor. Quando tais grupos são invariantes sob uma transformação do espaço, os mesmos descrevem uma simetria global.

No regime não relativístico, descrevemos as transformações entre dois referenciais inerciais por meio das transformações de Galileu, cujas propriedades de simetria preservam as leis da dinâmica, através de suas representações irredutíveis.

Nesse sentido, compreender as equações de uma partícula não relativística se constitui no início de qualquer estudo no importante tema da área de Física de Partículas e Campos para aqueles que já tiveram contato com as transformações de Galileu, algo de grande importância. Vale frisar que a área de Física de Partículas e Campos se constitui, por seu turno, em uma área de pesquisa do Campo do Saber da Física. Não sem razão esse tema é bastante estudado na literatura.

O estudo equação de uma partícula não-relativística é de grande importância para a formação de um físico, pois esta descreve o comportamento a partícula em movimento num regime de baixas velocidades. Além disso, para o estudo da invariância de calibre de uma partícula, é necessário saber seu comportamento, e representá-lo matematicamente.

METODOLOGIA

Na primeira etapa do trabalho seguimos um programa de estudos de revisão do tema Mecânica Quântica a partir dos textos clássicos que tratam do assunto. Foram discutidos os problemas básicos para uma perfeita assimilação de tal conteúdo. Depois dessa fase, partimos para o estudo dos artigos científicos que abordam essa problemática e, assim, o estado da arte de tal problema ficaria bem delimitado. Para a segunda etapa descrevemos as equações de uma-partícula, que é o passo inicial para a compreensão da Teoria Quântica de Campos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

1. Postulados da Mecânica Quântica

A Mecânica Quântica pode ser resumida nos seguintes princípios:

- Num tempo fixo t_0 , o estado de um sistema físico é definido pelo vetor de onda $|\Psi\rangle$ pertencente a um dado espaço de Hilbert;
- A cada observável corresponde um operador hermitiano linear;
- O único resultado possível de medição de uma quantidade física representada pelo operador \hat{A} é um dos autovalores do observável correspondente;
- O espectro de autovalores forma um espectro completo;

- Se a medida de uma quantidade física \hat{A} sobre um sistema no estado $|\Psi\rangle$ der o resultado a_n , o estado do sistema imediatamente após a medida é a projeção normalizada $\frac{P_n|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|P_n|\Psi\rangle}}$ com $P_n = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i|$ sobre o autoestado associado com a_n ;
- A evolução temporal de um sistema é dada por uma equação de onda. Para o caso de partículas de spin zero, é dada pela Equação de Schrödinger generalizada:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H(t)|\Psi(t)\rangle$$

onde $H(t)$ é o observável associado com a energia total do sistema.

2. Equação para partícula livre não-relativística

Geralmente é conveniente para a descrição de um sistema físico introduzir um sistema de coordenadas particulares no espaço de Hilbert, isto é, escolher uma representação. Como assume-se que cada observável tenha um set de autofunções que gera um subespaço do espaço de Hilbert de vetores de estado, essas autofunções podem ser usadas como uma base desse subespaço. A representação em que \mathbf{q} , o operador posição, é diagonal, é chamada posição ou representação de \mathbf{q} ; aquela em que o operador momento \mathbf{p} é diagonal, a representação de \mathbf{p} .

Na representação \mathbf{q} o vetor de estado $|\Psi\rangle$ é especificado por seus componentes na descrição da base $|\mathbf{q}\rangle$, as autofunções do operador posição. Os componentes $\langle\mathbf{q}|\Psi\rangle$ têm um significado físico direto: $|\langle\mathbf{q}|\Psi\rangle|^2 d\mathbf{q}$ é a probabilidade de que, ao ser realizada uma medida de posição, a partícula será encontrada entre \mathbf{q} e $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$. A autofunção satisfaz a equação $\mathbf{q}|\mathbf{q}'\rangle = \mathbf{q}'|\mathbf{q}'\rangle$ e o espectro do operador \mathbf{q} consiste dos pontos do espaço Euclidiano em três dimensões.

As autofunções $|\mathbf{q}'\rangle$ não são normalizáveis, pois eles correspondem a autovalores em espectro contínuo, mas são normalizáveis para uma função δ $\langle\mathbf{q}'|\mathbf{q}''\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'')$. Um sistema físico é representado por um vetor de estado e corresponde a um pacote de onda. Assim uma partícula localizada ao redor de \mathbf{q}'_0 pode ser representada por um vetor $|\rangle = \int d\mathbf{q} f(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'_0) |\mathbf{q}'\rangle$, onde f tem um pico ao redor de \mathbf{q}'_0 . A condição de normalização para esse vetor $|\rangle$ é $\langle | \rangle = \int d\mathbf{q} f^*(\mathbf{q}') f(\mathbf{q}')$, então $|\rangle$ será normalizado se f for quadrado integrável. A relação de completude pode ser escrita como $\int |\mathbf{q}'\rangle d\mathbf{q}' \langle\mathbf{q}'| = 1$. A representação do operador \mathbf{p} é obtida usando-se a regra de comutação $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$.

Pegando os elementos de matriz \mathbf{q}' , \mathbf{q}'' do comutador e usando a relação de completude obtemos então $\langle\mathbf{q}''|[q_r, p_s]|\mathbf{q}'\rangle = i\hbar\delta_{RS}(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'') = (q_r'' - q_r')\langle\mathbf{q}''|p_s|\mathbf{q}'\rangle$. Portanto, lembrando que $x\delta'(x) = -\delta(x)$, nós achamos $\langle\mathbf{q}''|p_s|\mathbf{q}'\rangle = -i\hbar\partial\langle\mathbf{q}''|\mathbf{q}'\rangle/\partial q_{s''}$. Similarmente, a representação do momento é caracterizada por vetores da base, os quais têm as seguintes propriedades:

$$\mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}'|\mathbf{p}'\rangle;$$

$$\langle\mathbf{p}'|\mathbf{p}''\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'');$$

$$\int |\mathbf{p}'\rangle d\mathbf{p}' \langle\mathbf{p}'| = 1.$$

A representação do operador \mathbf{q} é dada por $\langle\mathbf{p}''|q_r|\mathbf{p}'\rangle = i\hbar\frac{\partial\langle\mathbf{p}''|\mathbf{p}'\rangle}{\partial p_r''}$. A função de transformação unitária $\langle\mathbf{q}'|\mathbf{p}'\rangle$ que nos permite transformar da representação \mathbf{q} para a representação \mathbf{p} é obtida através do produto escalar da primeira propriedade com o bra $\langle\mathbf{q}'|$, ou seja, $\mathbf{p}'\langle\mathbf{q}'|\mathbf{p}'\rangle = \langle\mathbf{q}'|\mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle = \int \langle\mathbf{q}'|\mathbf{p}|\mathbf{q}''\rangle d\mathbf{q}'' \langle\mathbf{q}''|\mathbf{p}'\rangle = -i\hbar\nabla\mathbf{q}'\langle\mathbf{q}'|\mathbf{p}'\rangle$. Resolvendo essa equação diferencial, nós obtemos $\langle\mathbf{q}'|\mathbf{p}'\rangle = \lambda \exp\left\{\frac{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{q}'}{\hbar}\right\}$, onde a constante λ é determinada para um fator constante de módulo $(2\pi\hbar)^{-3/2}$ do requerimento que $\int \langle\mathbf{q}'|\mathbf{p}'\rangle d\mathbf{p}' \langle\mathbf{p}'|\mathbf{q}''\rangle = \langle\mathbf{q}'|\mathbf{q}''\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'')$. A função de onda $\Psi(\mathbf{q}') = \langle\mathbf{q}'|\Psi\rangle$ em espaço de configuração é então relacionada à função de onda do espaço do momento

$$\Phi(\mathbf{p}') = \langle \mathbf{p}' | \Psi \rangle \text{ pela transformação de Fourier: } \Psi(\mathbf{q}') = \langle \mathbf{q}' | \Psi \rangle = \int d\mathbf{p}' \langle \mathbf{q}' | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \Psi \rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d\mathbf{p}' \exp\left\{\frac{i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{p}'}{\hbar}\right\} \Phi(\mathbf{p}').$$

Para uma partícula livre não relativística, o operador Hamiltoniano H é essencialmente determinado pelos requisitos de que seja translacionamente e rotacionalmente invariante e de que se transforme como uma energia sob transformações Galileanas. Invariância de translação implica que H não depende da posição \mathbf{q} da partícula. É, desta forma, uma função apenas de \mathbf{p} , e para ser rotacionalmente invariante, só pode então ser função de \mathbf{p}^2 .

A relatividade Galileana requer que $H = \mathbf{p}^2/2m$, onde m é a massa da partícula. As autofunções $|E\rangle$ de H são determinadas pela equação $H|E'\rangle = E'|E'\rangle$. A completude e ortogonalidade agora são escritas como $\int dE'|E'\rangle\langle E'| = 1$ e $\langle E'|E''\rangle = \delta(E' - E'')$, respectivamente. As formas explícitas das autofunções podem facilmente ser derivadas na representação \mathbf{q} resolvendo-se a equação $\langle \mathbf{q}' | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} | E' \rangle = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{q}}^2 \langle \mathbf{q}' | E' \rangle = E' \langle \mathbf{q}' | E' \rangle$.

Desde que H e \mathbf{p} comutem, autofunções simultâneas desses dois operadores podem ser obtidas. Verifica-se que para o caso de uma partícula movendo-se em uma dimensão, $\langle q | E, p \rangle = C(E) \exp\left\{(2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{iq}{\hbar}\right\}$, é uma autofunção com autovalores E e $p = \sqrt{2mE}$. A constante de normalização $C(E)$, determinada de maneira que a relação de ortogonalidade seja válida, é $|C(E)|^2 = \left(\frac{m}{8\pi^2\hbar^2 E}\right)^{\frac{1}{2}}$. Sendo $v = (2E/m)^{1/2}$, $|C(E)|^2 = \left(\frac{1}{4\pi^2\hbar^2 v^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$1/2\pi\hbar v \rightarrow |C(E)| = \left(\frac{1}{2\pi\hbar v}\right)^{\frac{1}{2}}$, então $\langle q | E, p \rangle = (2\pi\hbar v)^{-1/2} \exp\left\{(2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{iq}{\hbar}\right\}$. onde uma constante de fase de módulo um foi omitida. A probabilidade de se encontrar a partícula descrita por $|E\rangle$ entre as coordenadas de posição q e $q + dq$ é dado por $|\langle q | E \rangle|^2 dq$, que é proporcional a dq/v , que é o tempo gasto no intervalo dq .

Finalmente, na representação de Schrödinger, a evolução no tempo da partícula é governada pela equação $i\hbar\partial_t |t\rangle = \left(\frac{1}{2m}\right) \mathbf{p}^2 |t\rangle$, que na representação \mathbf{q} , com $\langle \mathbf{q} | t \rangle = \Psi(\mathbf{q}; t)$ é escrita $i\hbar\partial_t \Psi(\mathbf{q}; t) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\right) \nabla_{\mathbf{q}}^2 \Psi(\mathbf{q}; t)$. Os passos que levam a esta última equação podem ser sumarizados dizendo-se que na relação de energia-momento para uma partícula livre não-relativística $E = \left(\frac{1}{2m}\right) \mathbf{p}^2$, E é substituído pelo operador $i\hbar\partial_t$ e \mathbf{p} por $-i\hbar\nabla$, e a expressão resultante para operar em $\Psi(\mathbf{q}; t)$, a função de onda descrevendo a partícula. A solução da equação de Schrödinger é então dada por $|t\rangle = \exp\left\{\left(\frac{-i\mathbf{p}^2}{2m\hbar}\right)(t - t_0)\right\} |t_0\rangle$. Assim, o operador de evolução temporal $U(t, t_0)$ é dado por $\exp\{(-i\mathbf{p}^2/2m\hbar)(t - t_0)\}$. Na representação \mathbf{q} , podemos escrever $\langle \mathbf{q} | t \rangle = \int d\mathbf{q}_0 \langle \mathbf{q} | U(t, t_0) | \mathbf{q}_0 \rangle \langle \mathbf{q}_0 | t_0 \rangle$, ou equivalentemente, $\Psi(\mathbf{q}; t) = \int d\mathbf{q}_0 K(\mathbf{q}t; \mathbf{q}_0 t_0) \Psi(\mathbf{q}_0; t_0)$, onde $K(\mathbf{q}t; \mathbf{q}_0 t_0) = (2\pi\hbar)^{-3} \int d\mathbf{p} \exp\{i/\hbar \mathbf{p} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)\} \exp\{(-i\mathbf{p}^2/2m\hbar)(t - t_0)\}$. Do fato que $U(t, t) = 1$, segue-se que $K(\mathbf{q}t, \mathbf{q}_0 t) = \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$, que é claramente satisfeita pela equação anterior, como requerido, de maneira que a função de onda seja uma identidade para $t = t_0$. Agora a solução da equação de Schrödinger é definida apenas para $t \geq t_0$. É conveniente requerer que $K = 0$ para $t < t_0$. Nós podemos incorporar essa condição de contorno escrevendo $K(\mathbf{q}t; \mathbf{q}_0 t_0) = \theta(t - t_0) \langle \mathbf{q} | U(t, t_0) | \mathbf{q}_0 \rangle$, onde $\theta(t)$ é uma função degrau definida como: $\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$, de modo que, $d\theta(t)/dt = \delta(t)$. A equação diferencial obedecida por K é agora derivada da equação anterior: $i\hbar\partial_t K(\mathbf{q}t; \mathbf{q}_0 t_0) = i\hbar\delta(t - t_0)\delta^{(3)}(t - t_0) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{q}}^2 K(\mathbf{q}t; \mathbf{q}_0 t_0)$, já que

$U(t, t) = 1$. K é função de Green que resolve o problema de Cauchy para a equação de Schrödinger para partícula livre não-relativística.

CONCLUSÃO

Utilizando-se dos postulados da Mecânica Quântica, foi calculada a equação de uma partícula livre não-relativística, utilizando-se a relatividade de Galileo, exigindo-se que o operador Hamiltoniano seja translacionalmente e rotacionalmente invariante e de que se transforme como uma energia, não dependendo assim da posição da partícula. Uma solução para a equação de Schrödinger para esse caso foi encontrada, assim como o operador evolução temporal. Pelas condições de contorno, encontramos uma função de Green que resolve o problema de Cauchy para a equação de Schrödinger para o caso de uma partícula livre não-relativística.

REFERÊNCIAS

- [01] EISBERG, R. M. Fundamentos da Física Moderna, Elsevier, Rio de Janeiro - RJ, 1979.
- [02] LEITE-LOPES, J. A.: Estrutura Quântica da Matéria – do Átomo Pré-Socrático às Partículas Elementares, 3^a ed, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2005.
- [03] GOLDSTEIN, H.: Classical Mechanics. Cambridge: Addison – Wesley, 1950.
- [04] LANDAU, L.; LIFSHITZ, E.: Teoria do Campo. Moscow: Mir, 1967.
- [05] ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J.G.: Notes for a course on Classical Fields. Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, March-June / 2004.
- [06] SCHWEBER, S.: An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Harper & Row Publishes, New York, N.Y., 1962.
- [07] GRIFFITHS, DAVID J.: Mecânica Quântica, tradução Lara Freitas, 2^a Ed., Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2011.