FRACTAIS EM CIRCUITOS ELÉTRICOS: EXPERIMENTO E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Josebel Maia dos Santos[1]; José Carlos Oliveira de Jesus[2], Antonio César do Prado Rosa Júnior[3], Álvaro Santos Alves [4], Clebson dos Santos Cruz[5]

1. Josebel Maia dos Santos, Licenciando, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: josebiao@gmail.com
2. José Carlos Oliveira de Jesus, DFIS, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: aprendizfaced@gmail.com
3. Antonio César do Prado Rosa Júnior, Instituto de Ciências Ambientais e Desenvolvimento Sustentável - ICADS, Universidade Federal da Bahia, e-mail: acprj2@yahoo.com.br
4. Álvaro Santos Alves, DFIS, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: asa@mail.uefs.br
5. Clebson dos Santos Cruz, Mestrando, Instituto de Física Universidade Federal Fluminense, e-mail: clebsoncruz@yahoo.com.br

Palavras-chave: pré-fractais, simulação numérica, equação de Laplace.

INTRODUÇÃO

As simulações computacionais são parte do cotidiano da pesquisa e do ensino de física. Todavia, há um crescente interesse em simulações analógicas, notadamente na pesquisa em ensino de física, dado seu potencial pedagógico como organizadores prévios para a aprendizagem significativa. Neste trabalho, apresenta-se um caso de simulação analógica usado na formação inicial docente (licenciatura plena em física) para mediar a transposição de conhecimentos sobre o potencial e o campo elétricos de distribuições estáticas de carga ou de potenciais fixados em superfícies. Para tanto, usou-se uma malha de resistores que simula um meio bidimensional onde realizou-se um estudo teórico e experimental da distribuição espacial do potencial elétrico, explorando a analogia entre um sistema eletrostático de condutores e dielétricos, e um sistema que conduz uma corrente estacionária. O trabalho teórico consistiu da resolução numérica da Equação de Laplace usando o método de diferenças finitas.

O estudo experimental consistiu da medição do potencial elétrico em função da posição, em todos os pontos de uma malha de resistores, com potenciais fixados em pontos ou linhas, formando estruturas complexas, a exemplo de sequências pré-fractais da curva de Koch. Resultados preliminares indicam que há uma preservação das propriedades dos pré-fractais nas famílias de equipotenciais, como esperado, mas há desdobramentos que indicam uma rota para a fractalidade.

MATERIAL E MÉTODOS

O estudo das linhas equipotenciais normalmente e feito em meios contínuos, como soluções, placas de materiais condutores, etc. Uma estratégia bastante utilizada é o experimento conhecido como a cuba eletrolítica ou o tanque eletrolítico (REITZ; MILFORD, 1982). Propomos a realização desse estudo em uma malha confeccionada por resistores com o mesmo valor de resistência nominal. A justificativa de utilizar uma malha de resistores vem do fato de que "Há uma analogia muito estreita entre um sistema eletrostático de condutores e dielétricos, por um lado, e um sistema que conduz uma corrente estacionária, por outro." (REITZ; MILFORD, 1982). A exigência dos valores iguais de resistências vem do objetivo de simular um meio eletricamente homogêneo. Para simular o meio eletricamente homogêneo optou-se por montar uma malha de resistores (fig. 1) cujas resistências nominais eram 1kΩ (um kiloohm) dentro do erro estatístico de 1% dado pelo fabricante. Um meio eletricamente homogêneo será aquele para o qual que se for retirado um pedaço da parte que o compõe e colocado em qualquer outro local no mesmo, esse procedimento não trará novos efeitos as suas propriedades elétricas.

Figura 1: Malha de resistores.

Para garantir a homogeneidade realizou-se a medida das resistências de um conjunto de resistores, utilizando um multímetro digital da marca BK® TEST BENCH® modelo 390, e montou-se um histograma (fig. 2) que ajudou na seleção dos resistores que comporiam a malha. O histograma ajusta-se bem com uma distribuição normal com média 987,6Ω e desvio-padrão de 5,2Ω, isto é, $R = (987,6 \pm 5,2)\,\Omega$. Como critério de seleção, optou-se por excluir aqueles resistores cujos valores de resistência estavam fora de um desvio-padrão, ou seja, os valores de resistência estão no intervalo $982,4\Omega < R < 992.8\Omega$.

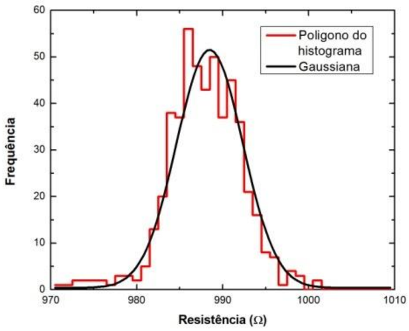

Figura 2: Histograma das medidas das resistências dos resistores selecionados para definir o intervalo de resistências que seriam utilizados na malha. A curva gaussiana mostra qual o melhor intervalo.

A utilização da malha de resistores recai em procedimentos metodológicos distintos daqueles empregados na cuba eletrolítica. Em primeira instância o meio contínuo é substituído por um discretizado. A superfície de um material condutor na presença de um campo elétrico estático é uma superfície equipotencial. Para simular uma tal superfície na malha de resistores são usados fios condutores ligando vários nós, adjacentes ou não, de forma a desenhar a geometria desejada do condutor. Na prática, portanto, a simulação analógica de uma superfície metálica é produzida por uma série de curtos-circuitos na malha. A malha de resistores não trata de um problema de eletrostática, mas para um caso de corrente estacionaria pode ser demonstrado que a equação de Laplace é valida (*REITZ, MILFORD, CHRISTY, 1982, p. 144*).

Nessa pesquisa simulou-se condutores com geometrias regulares e que possuem forma de pré-fractais[1]. Fractais (NUNES, 2006; POUL, 1997) são objetos que podem ser obtidos através procedimentos recursivos. Suas características fundamentais são auto-semelhança, invariância por escala, complexidade infinita e dimensão fracionada. Optou-se por simular o pré-fractal curva quadrática de Koch. Para realizar as medidas experimentais, definiu-se antes, as

[1] Um fractal é obtido quando o número de iteração tende ao infinito, sendo assim a estrutura simulada na pesquise não ser classificada como um fractal no sentido real do termo. Optou-se então em utilizar a terminologia pré-fractal uma vez que o processo recursivo de construção é o mesmo utilizado para gerar um fractal.

condições de fronteiras do problema. O pré-fractal foi submetido a uma d.d.p constante de 5 Volts e a borda da rede aterrada com uma d.d.p constante de 0 Volts. A d.d.p em cada um dos demais terminais é definida automaticamente quando o experimento atinge o equilíbrio. Esses valores são medidos através de um voltímetro e registrados em uma matriz (arquivo de texto). As linhas equipotenciais são determinadas numericamente por meio do programa Origininn Pro 8.

A simulação numérica consistiu na construção de um algoritmo capar de reproduzir as configurações montadas na malha, representando-se os condutores pelo valor de sua d.d.p, nesse caso 5 Volts, levando em conta sua forma e localização na malha e as condições de contorno imposta no problema específico, a borda ficou sobre uma d.d.p constante de 10 Volts. Mensurar a d.d.p nas demais regiões da malha é resolver a equação de Laplace em duas dimensões. Para isso utilizou-se o calculo numérico (ARFKEN; WEBER, 2007), com a utilização do método de diferenças finitas (M.D.F). O M.D.F é uma técnica matemática útil para resolução de equações diferencias de segunda ordem sejam essas homogêneas ou inomogeneas. Para aplica-lo devemos antes *(de acordo com SHADIKU, 2004, p. 598)*, definir no problema:

1 – Uma equação diferencial parcial;
2 – Um domínio;
3 – As condições de contorno e/ou condições inicias.

Para implementação do MDF para as configurações de pré-fractais utilizou-se a linguagem Fortran 95.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram simuladas experimentalmente a figura geradora e a primeira iteração (fig. 3a) da curva de Koch. Na figura a distribuição da d.d.p é representada por um gradiente de cores. A d.d.p tem seu valor mínimo nas regiões próximas à borda, cor azul marinho, e vai aumentado de intensidade na direção do condutor, onde atinge seu valor Maximo. Na simulação numérica calculamos até a segunda iteração (fig. 3b).

Uma análise das figuras 3mostra demonstra que o valor da d.d.p é mais intenso perto do pré-fractal. O campo elétrico $\vec{E}$ é definido como o negativo do gradiente do potencial V, ou seja, $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y}$, uma vez que estamos tratando de casos bidimensionais. A distância entre as linhas mais próximas ao condutor é menor do que a distância entre as que estão mais afastadas. Como consequência da definição de $\vec{E}$ teremos que $\vec{E}$ será mais intenso nas proximidades do pré-fractal. Na região distante da pré-fractal as linhas equipotenciais se comportam como se a configuração montada fosse uma elipse.

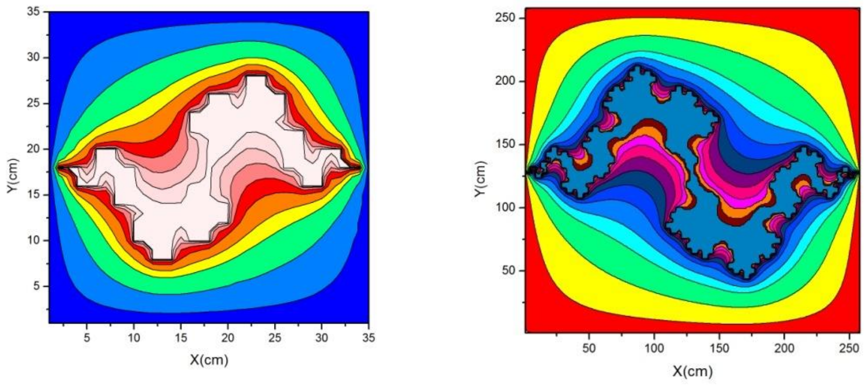

Figura 3: (a) Gráfico da configuração analógica para simulação da primeira iteração da curva quadrática de Koch. (b) Gráfico da configuração computacional para simulação da segunda iteração da curva quadrática de Koch.

Da figura 4 tem-se que as regiões 1 e 3 apresentam uma formas bastantes semelhante as duas regiões maiores mais ao centro da figura. A distribuição de cores também é a mesma. As regiões 2 e 4 são aproximadamente semelhantes. Essas semelhanças parecem evidenciar duas possíveis evoluções nesse pré-fractal. A pesar da região 4 centenas de vezes menor que as outras, todas possuem um mesmo gradiente de cores.
Uma das características de um fractal é a autossemelhança. As características elétricas para este pré-fractal parece apresentar essa propriedade, tanto nas estruturas equipotenciais que se repete, quanto na distribuição do gradiente de cores da distribuição da d.d.p.

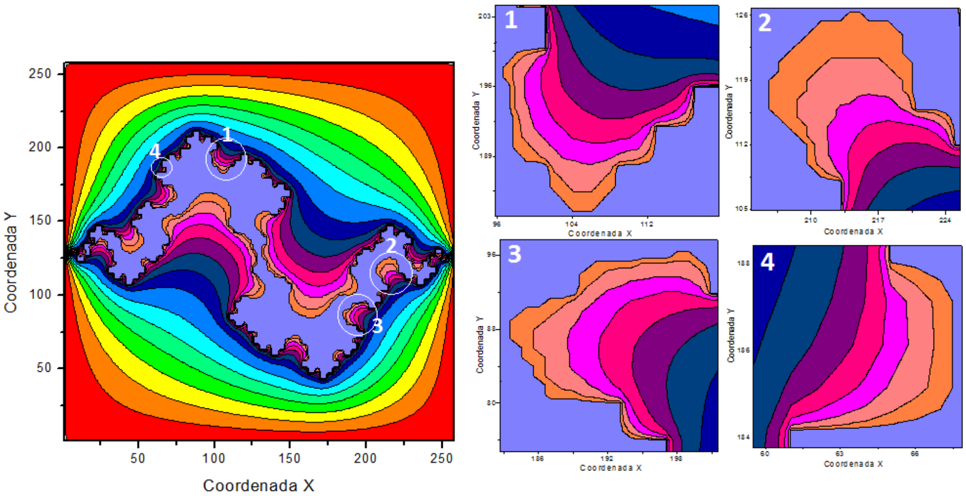

Figura 4: Gráfico da configuração analógica para simulação da segunda iteração da curva quadrática de Koch.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Resultados preliminares indicam que há uma preservação das propriedades dos pré-fractais nas famílias de equipotenciais, como esperado, mas há desdobramentos que indicam uma rota para a fractalidade.

REFERÊNCIAS

ARFKEN , Georg B; WEBER, Hans J. Física Matemática: métodos matemáticos para engenharia e física. Rio de Janeiro: Campus. 2007

SHADIKU, Matthew N. O. Elementos de Eletromagnetismo. São Paulo: Bookman. 3º. Edição 2004.

REITZ, John R.; MILFORD, Fmalharick J.; CHRISTY, Robert W. Fundamentos da teoria da eletromagnética. Rio de Janeiro: Campus, 1982.

NUNES, R. S. Rebelo, Geometria Fractal e Aplicações, Faculdade de Ciências da, Universidade do Porto, Janeiro de 2006.

POUL, S. Addson. Fractals and Chaos: An Illustrated Course. 1997.