

# DINÂMICA RELATIVA ENTRE PARTÍCULAS E VEÍCULOS ESPACIAIS - MODELOS PARA VELOCIDADE ANGULAR

**Giullyano Cordeiro dos Santos<sup>1</sup>; Antônio Delson Conceição de Jesus**<sup>2</sup>

1. Graduando em Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, email: [giullyamofisica@gmail.com](mailto:giullyamofisica@gmail.com)
2. Orientador, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, email: [ald1j1@gmail.com](mailto:ald1j1@gmail.com)

**PALAVRAS-CHAVE:** Movimento Elíptico, Velocidade Angular, Equações de Tschauner-Hempfel

## INTRODUÇÃO

Uma das maiores preocupações dos pesquisadores em Dinâmica Orbital reside no fato do ambiente gravitacional fora da terra estar repleto de partículas (detritos espaciais) que podem causar grande dano aos objetos espaciais operacionais, tais como satélites artificiais, estação espacial internacional, sondas espaciais enquanto orbitam em torno da terra, ônibus espaciais durante viagens específicas, etc. Estas partículas podem colidir com estes objetos espaciais, causando danos incalculáveis em recursos humanos, econômicos, tecnológicos e científicos. Como exemplo, podemos citar os sistemas de navegação e constelação de satélites como o GPS, GLONASS, GALILEO, etc, cujos objetivos são os de determinação da posição de um receptor. Estes sistemas são de grande importância e utilidade para a humanidade e podem ser inviabilizados se colidirem com estas partículas que orbitam em diversas órbitas no ambiente fora da terra. As partículas (detectáveis e não detectáveis – aquelas menores do que 10 cm) em órbitas baixas (LEO) possuem velocidades médias relativas da ordem de 11 km/s, o que torna a dinâmica neste ambiente de alto risco de colisões. Esta dinâmica precisa ser melhor compreendida e modelos físico-matemáticos têm sido apresentados ao longo das últimas décadas (Klinkrad, 2006, Liou, 2010). Contudo, a maioria dos modelos da dinâmica de colisão ou mesmo de captura gravitacional considera, por exemplo, a trajetória do veículo espacial (que está sob risco de colisão) como sendo circular, ou seja, com velocidade angular constante (Equações de Clohessy-Wiltshire, 1960 – que possuem solução semi-analítica), contrariamente ao caso real que tem trajetória elíptica e a velocidade angular não constante (Equações de Tschauner-Hempfel, 1965 – que não possuem solução analítica). Este fato compromete consideravelmente a precisão na determinação das posições relativas entre os objetos operacionais e as partículas, podendo inviabilizar as missões espaciais associadas a estes objetos. Neste trabalho mostramos uma possível solução para as equações de Tschauner-Hempfel e uma solução aproximada das equações da velocidade angular para orbitas elípticas. Com este mesmo objetivo, pretendemos também construir uma solução analítica desta equação num processo iterativo de Wavellets, usando a função  $W(t,a,e)$  encontrada.

## MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia aplicada neste trabalho foi a mais simples possível, nas condições que encontramos no Grupo de Dinâmica Orbital do DFIS/UEFS. Inicialmente, adotamos um Integrador Numérico para simular órbitas de veículos espaciais em torno da Terra. Com os resultados das simulações, confeccionamos gráficos da velocidade angular em função de certas grandezas físicas. Depois disto, verificamos a relação de dependência desta função em relação a estas grandezas, particularmente, em relação ao semi-eixo maior da órbita, à excentricidade e ao tempo. Esta relação de dependência passou por diversas fases de ajustamento, nas quais usamos séries de Fourier, métodos alternativos de solução e o método de Ondas (Morettin, 1999). Os materiais necessários e utilizados são computadores para simulação numérica, livros didáticos e específicos da área de Dinâmica Orbital e Astronomia, softwares específicos para uso do tratamento dos dados obtidos.

## RESULTADOS

A investigação proposta neste trabalho pretende encontrar a função velocidade angular através do estudo de casos reais e depois resolver analítica ou semi-analiticamente as equações de Tchauner-Hempel, aplicando-as a situações de interesse das missões espaciais, dando, portanto, uma contribuição importante para a ciência e tecnologia na área espacial. A seguir, exibimos as equações diferenciais que modelam a dinâmica relativa com velocidade angular não constante (as equações de Tchauner-Hempel),

$$\ddot{x} = 2x\dot{y} + \dot{x}y + w^2x + 2kxw^{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -2w\dot{x} - \dot{w}x + w^2y - kw^{\frac{3}{2}} \quad (2)$$

$$\ddot{z} = -kzw^{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

Resolvemos transformar as Equações (1-2) para tentarmos uma solução semi-analítica, depois de fazermos algumas aproximações. Reescrevendo as equações, encontramos a expressão a seguir,

$$m_1(t)\ddot{x} + m_2(t)\dot{x} + m_3(t)x = m_4(t)\ddot{y} + m_5(t)\dot{y} + m_6(t)y \quad (4)$$

Esta equação é representada por uma única equação diferencial,

$$\ddot{u} = h(t)\dot{u} + j(t)u^3 \quad (5)$$

Os coeficientes desta equação,  $h(t)$  e  $j(t)$ , são funções das condições iniciais e da velocidade angular. Para esta equação, sugerimos soluções do tipo:

$$x(t) = Ae^{iu(t)} \quad (6)$$

$$y(t) = Be^{iu(t)} \quad (7)$$

Usando o Método de Bernoulli, encontramos a solução da Equação (5),

$$u(t) = \pm \int \frac{e^{\int h(t)dt}}{\sqrt{c - 2 \int j(t)e^{2 \int h(t)dt}}} dt \quad (8)$$

Admitimos uma solução semi-analítica para a função velocidade angular no tempo, adotando a seguinte aproximação:

$$e \cos \theta \ll 1 \quad (9)$$

As expressões encontradas foram:

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu} \left( 1 + e \cos \left[ 2 \tan^{-1} \left( \frac{(2e+1) \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4e^2-1} (c+Kt) \right]}{\sqrt{4e^2-1}} \right) \right] \right)^2}{[a(1-e^2)]^{3/2}} \quad (10)$$

Ou, por derivação direta,

$$\dot{\theta} = \frac{k - 4e^2k}{1 - 2e \operatorname{Cosh}[\sqrt{-1 + 4e^2}kt]} \quad (11)$$

O valor de  $K$  é dado por,

$$K = \frac{\sqrt{\mu}}{[a(1-e^2)]^{3/2}} \quad (12)$$

Onde  $\mu$  é o parâmetro gravitacional.

Com esta abordagem, comparamos os resultados com a solução numérica do problema (produzida pelo Integrador Numérico). Uma análise dos dados computacionais mostrou que os valores encontrados para uma excentricidade de até 0,35, as equações 10 e 11 seriam boas aproximações.

## CONCLUSÃO

O objetivo desta pesquisa foi encontrar uma solução para as equações de Tschauner-Hempel. Os nossos resultados comprovam a utilidade da nova função para a velocidade angular, agora, descrita a partir das variáveis físicas do problema. Este fato permite-nos estudar diversos problemas já conhecidos, mas apenas para velocidades angulares constantes. O que há de inédito nesse trabalho é a sugestão de uma função incompleta para a solução das equações de T-H. Dizemos “incompleta” no sentido de que a nossa função não tem aplicabilidade para todas as faixas de excentricidade e semi-eixo maior, mas é aplicável a missões espaciais que se mantenham dentro destas faixas. Outro fato é que não se encontra na literatura uma função aproximada da velocidade angular como a que encontramos, além da análise da solução através da transformada de ondaletas, para a velocidade angular de órbitas elíptica.

## REFERÊNCIAS

- AGNOR, C. B.; HAMILTON, D. P.** Neptune's Capture of its Moon Triton in a Binary-Planet Gravitational Encounter. *Nature*.441; 192-194, 2006.
- BENNER L. A., MCKINNON W. B.**, 1995, *Icarus*, 118, 155.
- CARUSI A., VALSECCHI G.**, 1979. Numerical Simulations of Close Encounters Between Jupiter and Minor Bodies, 2 edn. The University of Arizona Press, Tuscon, pp 391-416.
- CLOHESSY, W.H. E WILTSHIRE, R. S.** Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous. *Journal of the Aerospace Sciences*, pp. 653-659, 1960
- EVERHART E.**, 1973, *The Astronomical Journal*, 78, 316.
- PHILPOTT C. M., HAMILTON D. P., AGNOR C. B.**, 2010, *Icarus*, 208, 824.
- VIEIRA NETO, E., WINTER, O. C.** Time analysis for temporary gravitational capture. *A&A* 377, 1119-1127, 2001.
- VOKROUHLICKÝ, D.; NESRVORNÝ, D.; LIVISON, H. F.** Irregular Satellite Capture by Exchange Reactions. *The Astronomical Journal*.136; 1463-1476, 2008.
- TSCHAUNER, J. E HEMPEL, P.**, Rendezvous zueinem in ellittischerBahnumlaufenderZiel, *AstronauticaActa*, Vol2, N° 02, pp. 104-109, 1965.