UM ESTUDO TOPOLÓGICO SOBRE VALORIZAÇÕES EM CORPOS

Gideone Oliveira Ribeiro[1]; Maurício de Araújo Ferreira[2]

1. Bolsista FAPESB, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: dellribeiro2009@hotmail.com
2. Maurício de Araújo Ferreira, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail:maferreira@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: valorizações, valor absoluto, topologia.

INTRODUÇÃO

O primeiro matemático a estudar a teoria de valorizações foi Josef Kürschák,em 1912, quando formulou os axiomas de valorizações. Uma motivação para este estudo foi a tentativa de melhorar a fundamentação da teoria de corpos p-ádicos que havia sido definido por Kurt Hensel anos antes. Na terminologia moderna, a valorização definida por Kürschák é denominada valor absoluto, enquanto o termo valorização é usado para um conceito mais geral, definido posteriormente por Wolfgang Krull.

Quando uma valorização assume valores no grupo aditivo dos reais, estas são chamadas de valorizações clássicas. Existe uma correspondência biunívoca entre uma valorização e um valor absoluto que é chamado de valor absoluto não-arquimediano equivalente. Assim como o valor absoluto, valorizações sempre induzem uma topologia no corpo que são conhecidas como V-topologias. Neste sentido, o estudo da topologia determinada pela valorização e as relações existentes por meio dessa relação biunívoca mencionada acima entre as topologias determinadas por valorização e valores absolutos, podem ser usadas para estudar estruturas mais gerais como álgebras. Um exemplo dessas álgebras é a de quatérnios que tem sido objeto de estudos ultimamente.

Para a realização do estudo, foram pesquisados os avanços recentes na teoria de valorizações e valores absolutos, assim como a descrição dos abertos e fechados determinados pelas topologias.

MATERIAL E MÉTODO

Como a pesquisa é de cunho teórico, os recursos utilizados foram obtidos através de um levantamento bibliográfico do assunto usando alguns títulos do acervo da biblioteca da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), assim como sites de apoio como o *Google Acadêmico* para encontrar literaturas recentes, principalmente em monografias e trabalhos apresentados em eventos, com o objetivo de conhecer os resultados já existentes sobre o assunto e as técnicas utilizadas para obtê-los.

A pesquisa teve início com uma revisão sobre topologia, dando ênfase para a topologia produto, que é necessária para se definir uma topologia em uma álgebra sobre um corpo topológico. Após esta revisão, foi feito um estudo sobre as propriedades de um corpo topológico e como a topologia fica determinada pelo sistema fundamental de vizinhança do elemento neutro. Esta abordagem é essencial quando estamos interessados em analisar aspectos topológicos dentro da teoria de valorizações.

O próximo passo foi estudar valor absoluto arquimedianos e não-arquimedianos (valorizações clássicas). O exemplo mais importante de valorizações clássicas estudada foi a valorização p-ádica no corpo dos racionais, que é de extrema importância em nossa pesquisa.

Como uma valorização induz uma topologia no corpo, é natural perguntar sobre a estrutura topológica que podemos obter através desta valorização e quais as condições para que uma topologia em um corpo precise satisfazer para que ele seja gerado por uma valorização. Para isto, algumas destas topologias foram estudadas dando ênfase à topologia induzida pela valorização p-ádica sobre o corpo dos racionais.

RESULTADO

Quando a valorização assume valores no grupo aditivo dos reais, verificamos que a topologia gerada por esta valorização e a topologia gerada pelo valor absoluto via correspondência biunívoca é a mesma como mostra a Proposição 2 que será mostrada após a Proposição 1 que relacionam valorizações e valores absolutos.

Proposição 1. Seja K um corpo. Existe uma correspondência bijetora entre as valorizações clássicas $v: K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e os valores absolutos $|\cdot|: K \to \mathbb{R}_+$ correspondentes.

Proposição 2. Seja K um corpo, $v: K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma valorização e $|\cdot|: K \to \mathbb{R}_+$ o valor absoluto correspondente (obtido pela correspondência biunívoca da Proposição1). Então, a topologia induzida por v é equivalente à topologia induzida pela métrica $d(x, a) = |x - a|$.

Também estudamos alguns resultados que descrevem os abertos e fechados na topologia induzida por uma valorização. Esta topologia fica perfeitamente determinada por uma base de vizinhanças em torno de um ponto.

Proposição 3. Seja K um corpo munido com uma valorização v. Para $a \in K$ e $\gamma \in \Gamma$, onde Γ é um grupo totalmente ordenado, temos que o conjunto $X = \{x \in K; v(x - a) \leq \gamma\}$, é aberto e fechado.

Proposição 4. Seja K um corpo munido com uma valorização v. Para $a \in K$ e $\gamma \in \Gamma$, temos que o conjunto $X = \{x \in K; v(x - a) \geq \gamma\}$, é aberto e fechado.

Proposição 5. Seja K um corpo munido com uma valorização v. Para $a \in K$ e $\gamma \in \Gamma$, temos que o conjunto $X = \{x \in K; v(x - a) = \gamma\}$, é aberto e fechado.

Na figura 1 a seguir, ilustramos a bola aberta de raio 1 centrada na origem com respeito a valorização 3-ádica no corpo dos racionais.

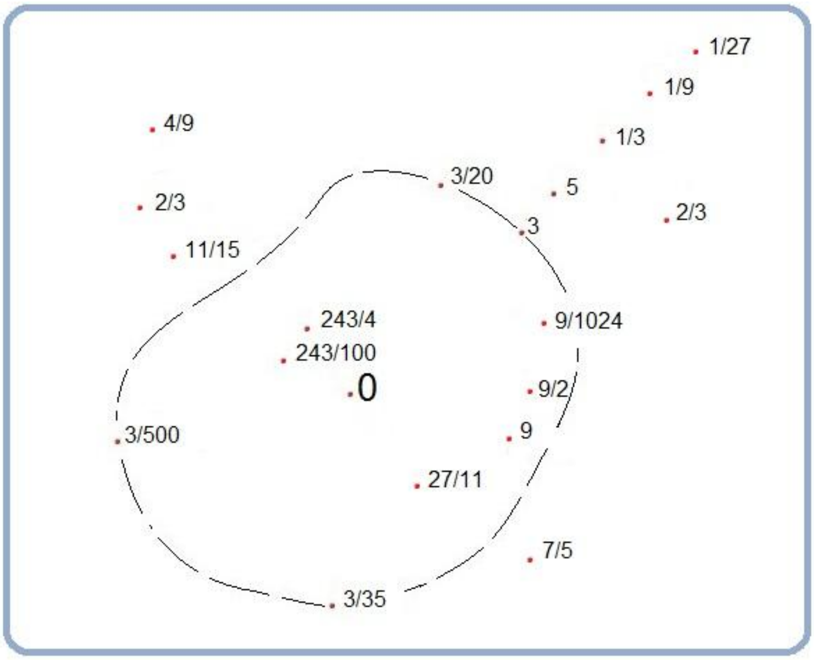

Figura 1: Vizinhança do ponto 0 com ϒ=1 em relação a valorização 3-ádica.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, E. D. **Estudo local e global de propriedades aritméticas**. 1997. 95p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, 1997.

DOMINGUES, H. **Álgebra Moderna**. 3ª edição. São Paulo: Atual, 1982.ENGLER, A. J.; PRESTEL, A. **Valued fields**. Springer Monographs im Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

GOLVÊA, F.Q. **Primeiros Passos p-ádicos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.

LIMA, E. L. **Elementos de topologia geral**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.

MELO, C. **Domínios de Dedekind como interseção de anéis de valorização**. Dissertação de mestrado – Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2006.

MIORIM, M. A. **Caracterização Topológica de corpos com Valorização**. Dissertação de mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1980.

MOURA, A. M. F. **Grupos de Divisibilidade e Retículos**. Dissertação de Mestrado -
Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2010.

PAIVA, Carlos R. **Os quaterniões de Hamilton**: introdução à Álgebra Geométrica. Disponível em: https://dspace.ist.utl.pt/.../[P28]%20Os%20Quaterniões%20de%20Hamilt*<acessado em: 10 de maio de 2013>*

ROQUETTE, P. History of valuation theory I. **Valuation theory and its applications**. Vol. I (Saskatoon, SK, 1999), 291-355, Fields Inst. **Commun**., 32, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

TIGNOL, J.-P.; WADSWORTH, A. R. **Value functions and associated graded rings for semisimple algebras.** Trans. Amer. Math. Soc**.** v. 362, n. 2, 687—726, 2010.