

A EXPANSÃO PERTURBATIVA DA MATRIZ-S NA QED E OS DIAGRAMAS DE FEYNMAN

Daniel Medeiros Reis¹; Franz Peter Alves Farias²

1. Bolsista PIBIC/FAPESB, Graduando em Bacharelado em Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: danmreis@live.com
2. Orientador, Departamento de Física, UEFS, e-mail: franz.farias@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: QED, Teoria de Campos, Matriz-S.

INTRODUÇÃO

A Eletrodinâmica Quântica (QED) é a teoria física que dá conta das interações entre os campos quânticos fundamentais, o campo de Maxwell (fóton) e o de Dirac (elétron ou pósitron). Ao considerarmos a interação destes campos, uma abordagem interagente (abordagem de Dirac) permite descrever a evolução dos estados quânticos em função apenas da hamiltoniana de interação, resolvida por meio de uma expansão perturbativa, conhecido como Matriz S [2]. A técnica da Matriz S continua atual, sendo seus cálculos realizados por computadores e algoritmos para alcançar as ordens superiores da expansão perturbativa necessárias à precisão dos resultados teóricos.

Neste trabalho, mostraremos como ocorrem alguns processos entre partículas elementares no contexto da QED, como o espalhamento Bhabha, que descreve a interação entre um elétron e um pósitron através da troca de um fóton virtual e o espalhamento Compton, evidenciando a linguagem dos diagramas na expansão perturbativa da Matriz S. Mostramos estes processos explicitando os diagramas de Feynman de ordem mais baixas, permitidos pela relação de dispersão, na expansão perturbativa e que dão conta da correção radiativa à massa (pela emissão do quantum do campo de calibre) e a chamada polarização de vácuo (o laço de matéria emissão de partícula e antipartícula), observados em ordem mais baixa. Tratando por fim dos procedimentos de regularização e renormalização, sem as quais nenhum resultado em teoria quântica de campos é possível (ou seja, finito) [4].

METODOLOGIA

Alcançar a expansão perturbativa da Matriz S na QED impõe conhecer a teoria clássica de campos, a quantização destes últimos [3], bem como a técnica de abordagem ao sistema de campos interagentes por teoria de perturbação (solução construída por uma expansão do termo de interação em potências da constante de acoplamento da QED, a constante de estrutura hiperfina). Em sistemas interagentes, o operador hamiltoniano total H do sistema terá uma contribuição da hamiltoniana livre H_0 que corresponde aos campos livres e outra que advém da própria interação dos campos, a hamiltoniana de interação H_I , ou seja,

$$H = H_0 + H_I. \quad (1)$$

Para tratar da evolução temporal deste sistema, devemos usar outra abordagem que é a de Dirac, cujos estados e operadores tem dependência temporal, e satisfazem as mesmas equações dinâmicas e as relações de comutação dos operadores de campos livres, porém o que governa a evolução dos estados será a própria hamiltoniana de interação, assim temos,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_I(t) |\psi(t)\rangle. \quad (2)$$

Esta equação é resolvida por meio de uma série perturbativa. No contexto da QED, a hamiltoniana de interação exibe a constante de acoplamento que é a constante de estrutura fina ($\alpha \sim 1/137$), que garante a convergência da série. Na QED, a hamiltoniana de interação envolverá o campo de calibre (gauge), A_μ , responsável pela descrição do fóton, e o de Dirac, ψ , cujas excitações elementares são o elétron e o pósitron, temos;

$$H_I = -\int d^3x \mathcal{L}_i = e \int d^3x A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (3)$$

onde e é a carga elementar do elétron, \mathcal{L}_i a lagrangeana (densidade) de interação e γ^μ são matrizes de Dirac. Logo, a matriz S terá neste caso a forma:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{H_I(t_1)H_I(t_2) \dots H_I(t_n)\}. \quad (4)$$

Onde o novo estado será $|\psi(t)\rangle = S|\psi(t_0)\rangle$.

O operador T é responsável pela ordenação temporal dos operadores de campos envolvidos em H_I , que supondo dois campos $\phi(x_1)\phi(x_2)$ em tempos distintos, o resultado da ordenação temporal será,

$$T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} = N\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} + \langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|0\rangle \quad (5)$$

O operador N é responsável pelo ordenamento normal dos operadores, i.e., aquele que mantém sempre os operadores de aniquilação à direita dos de criação.

RESULTADOS

Se o sistema em estudo está em um estado inicial $|i\rangle$, probabilidade de transição de após uma colisão, cujo estado final é $|f\rangle$, é dado por $|\langle f|S|i\rangle|^2$. Os processos reais ocorrem no mínimo em segunda ordem da expansão perturbativa, juntamente com as correções radiativas, e a amplitude de transição terá a forma geral [2]:

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^4(\sum p'_f - \sum p_i) \prod_i \left(\frac{1}{2VE_i}\right)^{1/2} \cdot \prod_f \left(\frac{1}{VE'_f}\right)^{1/2} \cdot \prod_i (2m_i)^{1/2} \cdot M, \quad (6)$$

Onde, (p'_f, E_f) e (p_i, E_i) são os momentos e as energias finais e iniciais das partículas reais envolvidas. m_i é a massa de cada lépton envolvido e M é amplitude de Feynman, que para cada processo é possível obter diretamente por meio das regras de Feynman, analisando apenas os diagramas de Feynman. No espalhamento Bhabha temos a interação elétron-pósitron com a troca de um fóton virtual, cujo diagrama de Feynman é,

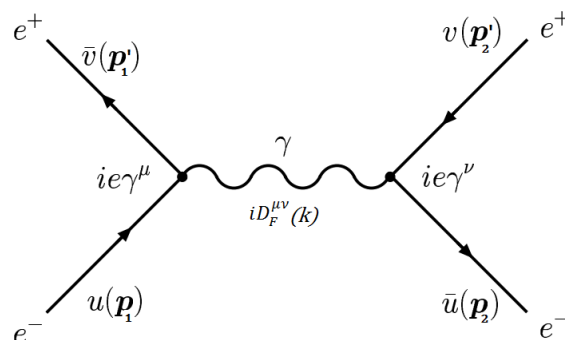


Figura 1: Diagrama de Feynman para o espalhamento Bhabha, explicitando os termos que surgirão na amplitude M , correspondente a cada linha interna, externa e os vértices.

Das regras de Feynman, a amplitude de Feynman M_B será,

$$M_B = (ie)^2 \bar{u}(\mathbf{p}_2) \gamma^\nu v(\mathbf{p}'_2) iD_F^{\mu\nu}(k) \bar{v}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1) \quad (7)$$

Para cada linha externa temos $u(\mathbf{p})$ e $\bar{u}(\mathbf{p})$ para o elétron inicial e final e $v(\mathbf{p}')$ e $\bar{v}(\mathbf{p}')$ para o pósitron inicial e final, onde esses termos são os espinores. Na linha interna, $iD_F^{\mu\nu}$ é o propagador do fóton que é uma partícula virtual de momento k , intermediadora dessa interação. Logo a amplitude de transição será:

$$\langle f | S_B | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p'_2 + p_2 - p'_1 - p_1) \left(\frac{m}{V}\right)^2 \left(\frac{1}{E_{p_2}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{E_{p'_2}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{E_{p_1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{E_{p'_1}}\right)^{\frac{1}{2}} M_B. \quad (8)$$

Já no espalhamento Compton, a amplitude de transição temos

$$\langle f | S_C | i \rangle = \left[(2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{p'}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2V\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2V\omega_{k'}}\right)^{\frac{1}{2}} \right] M_C; \quad (9)$$

e

$$M_C = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\alpha \varepsilon(\mathbf{k}') iS_F(p+k) \gamma^\beta \varepsilon(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}). \quad (10)$$

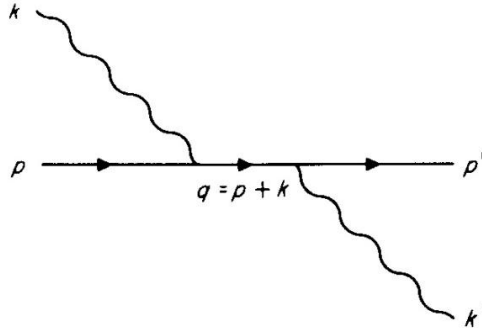


Figura 2: Diagrama de Feynman da contribuição de S_C para o espalhamento Compton

Na figura (2), nas linhas externas temos no estado inicial do fóton com momento k interagindo com o elétron de momento p , a linha interna é o propagador do férmion, que é o intermediário desta interação. Nestes processos citados, teremos resultados finitos, o que não ocorre nas correções radiativas que surgirão, como a polarização de vácuo e a auto-energia do elétron, que são os loops das linhas internas nos diagramas. Estes diagramas são,

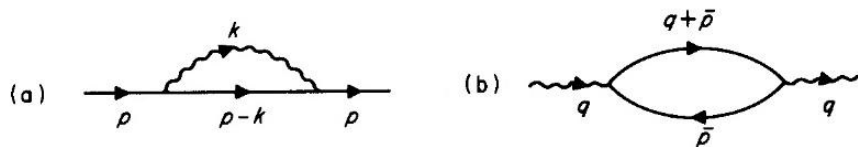


Figura 3: Correções radiativas de segunda ordem para o férmion e o fóton.

Nos processos (a) e (b) surgirão nas amplitudes de Feynman os termos

$$ie^2 \Sigma(p) = \frac{(ie)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k iD_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha iS_F(p-k) \gamma^\beta; \quad (11)$$

e

$$ie^2 \Pi^{\mu\nu}(q) = \frac{(ie)^2}{(2\pi)^4} (-1) Tr \int d^4\bar{p} \bar{\gamma}^\mu iS_F(\bar{p}+q) \gamma^\nu iS_F(\bar{p}). \quad (12)$$

Ao substituir as expressões dos propagadores do férmion e do fóton, onde,

$$iD_{F\alpha\beta}(k) = \frac{-g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon}, \quad iS_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}.$$

As expressões (11) e (12) ocasionarão em resultados infinitos, que não tem sentido físico. Para contornar este problema é necessário adotar alguns procedimentos, como os de renormalização e regularização, que permite extrair soluções finitas das correções radiativas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos o método perturbativo para campos interagentes na QED, evidenciando a linguagem dos diagramas de Feynman nos espalhamentos entre partículas elementares. Os diagramas de Feynman trazem uma simplificação para a construção das amplitudes de transição, nas mais variadas ordens da expansão perturbativa. Com este estudo, poderemos calcular as correções radiativas a massa e a carga do elétron, que é o próximo passo da pesquisa, que consiste em estudar os métodos de regularização de Pauli-Villars e a regularização dimensional no cálculo das correções radiativas e extrair as soluções finitas.

REFERÊNCIAS

- [1] MAGGIORE, M. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. New York: Oxford University Press (2006).
- [2] MANDL, F., SHAW, G., *Quantum Field Theory*, 2nd ed.. John Wiley and Sons, (2010).
- [3] RYDER, L.H., *Quantum Field Theory*. New York: University of Cambridge (1994).
- [4] PESKIN, M.E., SCHROEDER, D.V. *Introduction to Quantum Field Theory*. Colorado: Westview Press (1995).
- [5] KAISER, D. *Physics and Feynman's Diagrams*. American Scientist **93**, 156 (2005).