ESTUDO DOS GRUPOS CONTÍNUOS E SUA APLICAÇÃO NAS TEORIAS DA FÍSICA, VISANDO UMA COMPREENSÃO EM TEORIA DE CAMPOS

Ana Camila Costa Esteves [1]; **Milton Souza Ribeiro Miltão**[2];

1. Bolsista PIBIC/CNPq, Graduanda em Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: milinhamd@gmail.com

2. Orientador, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, email: miltaaao@ig.com.br

PALAVRAS CHAVE: Grupos contínuos, Física de Partículas e Campos, Grupos de Lie.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho foram estudados os grupos contínuos da Física. Para isso partimos da Teoria de Grupos, um tema da matemática, e utilizando as noções de sistemas de referência e de simetrias pretendemos descrever os grupos contínuos mais utilizados no campo do saber da Física, como por exemplo, os grupos de Galileu e de Poincaré. O uso destes conhecimentos matemáticos será importante para que a etapa final deste trabalho ocorra: a compreensão das pesquisas em Teoria de Campos.

A Teoria de Grupos se relaciona com diversas ciências atuais, aparecendo constantemente em estudos de álgebra, química, topologia, entre outros. Sua importância na Física é facilmente observada à medida que os grupos podem representar algebricamente inúmeras teorias físicas. Assim, se relaciona com a Física de Partículas à medida que prevê partículas e fenômenos que podem eventualmente ser comprovados por meio de testes e experimentos. Além disso, na relatividade utilizamos transformações de coordenadas entre sistemas referenciais inerciais que quando consideradas como operações binárias formam grupos de grande importância na Física (Ferreira, 2009).

A noção de continuidade é muito importante para o estudo de grupos. Isso se deve ao fato de existirem grupos cujos elementos não são enumeráveis, os grupos contínuos. Estes grupos são ditos contínuos, pois para "enumerar" os seus elementos é necessário lançar mão de parâmetros reais ou coordenadas que variam continuamente. Os grupos contínuos são os de maior importância para este trabalho, visto que pretendemos estudar certos grupos de Lie, que são grupos contínuos (Mukunda e Sudarshan, 1974).

O objetivo geral deste trabalho é proporcionar um conhecimento básico a respeito dos pilares que regem a física de partículas e campos, e tal conhecimento será promovido através do estudo da teoria de grupos, que se constitui como objetivo específico deste trabalho, visto que ambos os temas estão intimamente relacionados, como já foi discutido.

METODOLOGIA

O estudo realizado é teórico e baseado em leituras e resoluções de exercícios, além de discussões que incluem apresentações de seminários nas reuniões do grupo intitulado "Teoria de Campos e Física Matemática", pertencente ao Departamento de física da UEFS. Nestas reuniões contamos com a presença de docentes e discentes que discutem a temática em questão propondo seminários e pequenos cursos pertinentes para um melhor entendimento do tema. A participação nestas atividades é fundamental para que certos conteúdos que ainda são muito avançados sejam aos poucos assimilados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Um grupo G é um conjunto de elementos (objetos, operações, rotações, transformações) que podem ser combinados por uma operação $*$ (“multiplicação de grupo”) e que satisfazem às seguintes propriedades:

1. **Fechamento**: se a e b são dois elementos quaisquer de G, então seu produto $a * b$ também é um elemento de G.
2. **Associatividade**: se a, b, c pertencem a G, então
$$(a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c.$$
3. **Elemento neutro**: existe um elemento único I tal que, para todo $a \in G$
$$I * a = a * I = a.$$
4. **Elemento inverso**: Para todo $a \in G$ existe um único $a^{-1} \in G$ tal que
$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = I.$$

Como o objetivo deste trabalho é estudar os grupos contínuos que interessam na Física de partículas e campos, é necessário entender a conexão entre os conceitos de grupos e de continuidade. Para isso será feita uma abordagem sobre espaços topológicos e, consequentemente, sobre grupos topológicos.

Seja S um conjunto com os elementos a, b,..., x,... . Dizemos que uma topologia θ foi definida em S se temos uma coleção de subconjuntos N, N’, N’’,... de S com as seguintes propriedades: Para cada $x \in S$ devem ser associados alguns desses subconjuntos, que serão chamados de “vizinhanças de x” e denotados por N_x, N'_x, N''_x,..., e devemos ter:

I. $x \in N_x$, sendo N_x qualquer vizinhança de x.
II. Se N_x, N'_x são vizinhanças de x, deve existir uma vizinhança N''_x de x obedecendo $N''_x \subset N_x \cap N'_x$.
III. Se N_x é uma vizinhança de x e $y \in N_x$, deve existir uma vizinhança N_y de y, tal que $N_y \subset N_x$.

Um conjunto S com uma topologia θ definida nele é chamado de “**espaço topológico**”.

Agora podemos definir um grupo topológico. Seja G um conjunto que é um grupo e um espaço topológico ao mesmo tempo. Chamamos G de grupo topológico se as operações de grupo de achar inversas de elementos dados e efetuar produtos entre pares de elementos forem ambas contínuas com relação à topologia em questão.

Se $a \in G$ é um elemento arbitrário de G, escrevemos N_a, N'_a, ... para as vizinhanças de a em uma dada topologia. Então devemos ter:

(i) Continuidade de inversas: Dada qualquer vizinhança $N_{a^{-1}}$ do elemento a^{-1}, deve existir uma vizinhança N_a de a tal que $b \in N_a$ implique $b^{-1} \in N_{a^{-1}}$.

(ii) Continuidade de produtos: Sejam a, b dois elementos de G, e $c = ab$ o produto entre eles. Então, dada qualquer vizinhança N_c de c, devem existir vizinhanças N_a, N_b de a, b respectivamente tais que $a' \in N_a$ implique $a'b' \in N_c$, ou $N_a N_b \subset N_c$.

Um grupo topológico G é chamado de grupo de Lie se existe alguma vizinhança N_o da identidade que pode ser mapeada homeomorficamente em um subconjunto aberto, limitado do espaço euclidiano E_n para algum n.

Podemos estabelecer uma correspondência um a um entre os elementos $a \in N_o \subset G$ do grupo e pontos situados em uma região aberta limitada em E_n de tal forma que esta correspondência é um mapeamento contínuo em ambas as direções.

Os grupos que estão relacionados com propriedades do espaço e tempo são grupos de Lie. Exemplos de tais grupos são o grupo Euclidiano E(3), e os grupos de Galileu e de Lorentz/Poincaré.

Um dos principais objetivos do presente trabalho é o estudo dos grupos de Galileu e de Poincaré. Estes grupos são formados quando consideramos as transformações de Galileu e de Poincaré como operações binárias.

Considerando dois sistemas de coordenadas K e K' (figura 5), que se movem com a velocidade relativa $\vec{v}$ e que coincidem em $t = 0$, as coordenadas de um ponto P, relativo a K' e K, respectivamente, são relacionados pela transformação de Galileu, que é dada por:

$$\vec{x}^{'} = \vec{x} - \vec{v}t$$
$$t^{'} = t$$

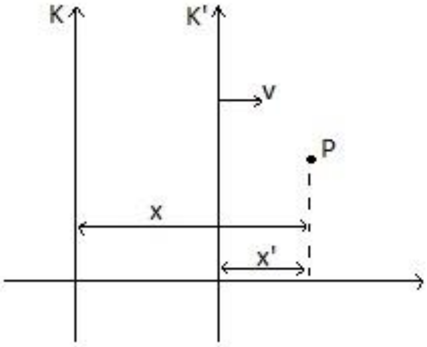

Figura 1 – Sistemas de coordenadas com um movimento relativo mútuo.

Pode ser mostrado que a transformação de Galileu forma um grupo. Podemos verificar a propriedade de fechamento considerando como elementos do grupo as velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Aplicando em sequência as transformações:

$$\vec{x}^{'} = \vec{x} - \vec{v}_1 t\ , \quad t^{'} = t \tag{1}$$
$$\vec{x}^{''} = \vec{x}' - \vec{v}_2 t\ , \quad t^{'^{'}} = t' \tag{2}$$

obtém-se novamente um elemento do grupo, a saber:

$$\vec{x}^{'}{}' = \vec{x} - \vec{v}t\ , \quad t^{''} = t \tag{3}$$

que é especificado pela velocidade $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, sendo esta a lei de adição de velocidades válida na Mecânica Newtoniana.

As transformações de coordenadas que correspondem ao princípio da relatividade de Einstein são as transformações de Lorentz. Essas transformações são dadas por:

$$x' = \gamma(v)(x - vt) \tag{4}$$
$$y' = y \tag{5}$$
$$z' = z \tag{6}$$
$$t' = \gamma(v)(t - \frac{v}{c^2}x) \tag{7}$$

onde *(x', y', z', t')* são as coordenadas do ponto P no sistema *K'* da figura 5 e *(x, y, z, t)* são as coordenadas no sistema *K*. *v* é a velocidade relativa entre os dois sistemas referenciais e *c* a velocidade da luz no vácuo.

Realizando duas transformações de Lorentz em sequência, obtém-se novamente uma transformação de Lorentz. Já que a propriedade associativa existe, e o elemento inverso e o elemento identidade existem, a transformação de Lorentz forma um grupo.

Assim, seja v_1 a velocidade de *K'* em relação a K e v_2 a velocidade de *K''* relativa a *K'*, nas direções positivas de *x* e *x'*, temos

$$x' = \gamma(v_1)(x - v_1 t)\ , \quad x'' = \gamma(v_2)(x' - v_2 t') \tag{8}$$
$$t' = \gamma(v_1)\left(t - \frac{v_1}{c^2}x\right)\ , t'' = \gamma(v_2)\left(t' - \frac{v_2}{c^2}x'\right) \tag{9}$$

Expressando *x'', t''* em termos de *x, t* temos que

$$x'' = \gamma(v_2)\gamma(v_1)\left[x - v_1 t - v_2\left(t - \frac{v_1}{c^2}x\right)\right] \tag{10}$$

$$t'' = \gamma(v_2)\gamma(v_1)\left[t - \frac{v_1}{c^2}x - \frac{v_2}{c^2}(x - v_1 t)\right] \quad (11)$$

Agora, essa transformação (de K a K'') é um elemento do grupo de Lorentz que pode ser escrito da seguinte forma:

$$x'' = \gamma(w)(x - wt) \quad (12)$$

$$t'' = \gamma(w)(t - \frac{w}{c^2}x) \quad (13)$$

Onde w representa o parâmetro de grupo definindo a transformação de K a K'.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do que foi estudado foi possível compreender uma das aplicações da teoria de grupos na física, em especial na relatividade, já que podemos formar os grupos de Galileu e de Poincaré por meio das simetrias nas transformações de Galileu e de Lorentz.

Além disso, para entender a relação entre continuidade e grupos, já que temos interesse nos grupos contínuos, foi necessário fazer um estudo de espaços topológicos e, consequentemente, grupos topológicos. A assimilação de tais conteúdos é fundamental para o objetivo deste trabalho. Como foi explicado, os grupos de maior interesse para essa pesquisa são grupos de Lie, que são grupos topológicos, portanto esta é uma etapa de grande importância para a continuidade dessa pesquisa.

Dessa forma, a pesquisa continuará, visando o estudo de mais grupos que possuem aplicações na física. Para tal é necessário ter conhecimento a cerca de outras simetrias presentes na física, tópico que está em processo de estudo.

REFERÊNCIAS

ALDROVANDI, R. e PEREIRA, J. G.: Notes for a course on Classical Fields. Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, March-June / 2004.

BASSALO, J. M. F. e CATTANI, M. S. D. Teoria de grupos para físicos. 1ª ed. Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Agosto/2005.

BAUMSLAG, B. e CHANDLER, B. Group Theory. McGraw-Hill, New York, 1968.

EISBERG, R. M. Fundamentos da Física Moderna, Guanabara Dois, Rio de Janeiro - RJ, 1979.

FERREIRA, A. L. Um estudo dos sistemas de referência e sua relação com a teoria de grupos. Monografia de Graduação, Universidade Estadual de Feira de Santana, 2009.

FOCK, V. A. Princípios da Mecânica Quântica Moscow: Mir, 1976.

GOLDSTEIN, H.: Classical Mechanics. Cambridge: Addison – Wesley, 1950.

LANDAU, L. e LIFSHITZ, E. : Teoria do Campo. Moscow: Mir, 1967.

LEMOS, N. A. Mecânica analítica. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. 386p.

LOPES, J. A. L.: Estrutura Quântica da Matéria - do Átomo Pré-Socrático às Partículas Elementares. 3ª Ed, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2005.

RODITI, I. Padrões e simetrias: Estética na Física e na Matemática. CBPF, Rio de Janeiro, 2003.

SANTANA, A. E. : Sobre covariância Galileana e o campo de Schrödinger. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol.19, nº 1, março, 1997.

SUDARSHAN, E. C. G and MUKUNDA, N., Classical Dynamics: A modern perspective, John Wiley & Sons, New York, 1974).