

# SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE TSCHAUNER-HEMPFEL PARA O MOVIMENTO ELÍPTICO ENTRE OBJETOS ESPACIAIS

**Giullyano Cordeiro dos Santos<sup>1</sup>; Antônio Delson Conceição de Jesus**<sup>2</sup>

1. Bolsista PIBIC/FAPESB, Graduando em Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, email: e-mail [giullyamofisica@gmail.com](mailto:giullyamofisica@gmail.com)
2. Orientador, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: [ald1j1@gmail.com](mailto:ald1j1@gmail.com)

**PALAVRAS-CHAVE:** Movimento Elíptico, Velocidade Angular, Equações de Tschauner-Hempfel

## INTRODUÇÃO

Uma das maiores preocupações dos pesquisadores em Dinâmica Orbital reside no fato do ambiente gravitacional fora da terra estar repleto de partículas (detritos espaciais) que podem causar grande dano aos objetos espaciais operacionais, tais como satélites artificiais, estação espacial internacional, sondas espaciais enquanto orbitam em torno da terra, ônibus espaciais durante viagens específicas, etc. Estas partículas podem colidir com estes objetos espaciais, causando danos incalculáveis em recursos humanos, econômicos, tecnológicos e científicos. Como exemplo, podemos citar os sistemas de navegação e constelação de satélites como o GPS, GLONASS, GALILEO, etc, cujos objetivos são os de determinação da posição de um receptor. Estes sistemas são de grande importância e utilidade para a humanidade e podem ser inviabilizados se colidirem com estas partículas que orbitam em diversas órbitas no ambiente fora da terra. As partículas (detectáveis e não detectáveis – aquelas menores do que 10 cm) em órbitas baixas (LEO) possuem velocidades médias relativas da ordem de 11 km/s, o que torna a dinâmica neste ambiente de alto risco de colisões. Esta dinâmica precisa ser melhor compreendida e modelos físico-matemáticos têm sido apresentados ao longo das últimas décadas (Klinkrad, 2006, Liou, 2010). Contudo, a maioria dos modelos da dinâmica de colisão ou mesmo de captura gravitacional considera, por exemplo, a trajetória do veículo espacial (que está sob risco de colisão) como sendo circular, ou seja, com velocidade angular constante (Equações de Clohessy-Wiltshire, 1960 – que possuem solução semi-analítica), contrariamente ao caso real que tem trajetória elíptica e a velocidade angular não constante (Equações de Tschauner-Hempel, 1965 – que não possuem solução analítica). Este fato compromete consideravelmente a precisão na determinação das posições relativas entre os objetos operacionais e as partículas, podendo inviabilizar as missões espaciais associadas a estes objetos. Neste trabalho, apresentamos inicialmente uma análise da função velocidade angular, extraída de simulações de órbitas reais, usando integrador numérico, comparando-a com um modelo de função proposto, baseado no rastreamento do comportamento da mesma com elementos keplerianos e o tempo. Esta comparação tem o objetivo de utilizarmos a nossa proposta na solução analítica das equações de Tschauner-Hempel, como primeira aproximação. Foram feitas diversas simulações para modelar uma equação geral para o  $W(t,a,e)$ . Com este mesmo objetivo, pretendemos também construir uma solução analítica desta equação num processo iterativo de Wavellets, usando a função  $W(t,a,e)$  encontrada.

## MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia utilizada foi a mais simples possível. Inicialmente simulamos o integrador de órbitas realistas (cedido por Symon Henrique, ex-estudante do grupo de Dinâmica Orbital) e fazemos gráficos da velocidade angular em função dos elementos keplerianos semi-eixo maior e excentricidade e o tempo. A partir daí, sugerimos expressões algébricas de cada função individual  $W(a)$ ,  $W(e)$  e  $W(t)$ . Daí, construímos a função total  $W(t,a,e)$  pelo produto destas funções particulares, comparando-a com os resultados das simulações da órbitas realistas. De posse da relação funcional da velocidade angular para órbitas elípticas, solucionamos a equação de Tschauner-Hempe. Esta mesma função será usada como função inicial para um processo iterativo de Wavellets no sentido de encontrar uma solução analítica desta equação. Os resultados obtidos pelos dois métodos serão comparados e o melhor resultado será usado para testar diversas órbitas de manobras em missões espaciais já conhecidas e que utilizaram velocidade angular constante (órbitas circulares).

Os materiais necessários e utilizados são computadores para simulação numérica, livros didáticos e específicos da área de Dinâmica Orbital e Astronomia, softwares específicos para uso do tratamento dos dados obtidos.

## RESULTADOS

Em posse de um programa (integrador) criado por Saymon em sua tese de mestrado, simulamos diversas órbitas reais para a velocidade angular. Com essas simulações, criamos, por inferência, uma função  $W(t,a,e)$  para a velocidade angular.

As Figuras dos gráficos, a seguir, mostram resultados das simulações da função  $W$  com um semi-eixo fixo de 20.000 km fixo para excentricidades 0,3 (Figura 1) e 0,4 (Figura 2), respectivamente.

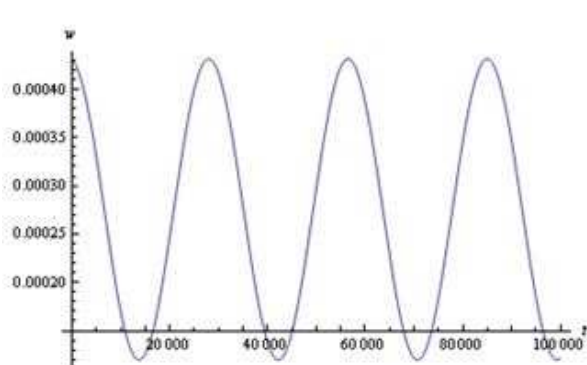


Fig. 1 - Velocidade Angular vs. Tempo,  $e = 0,3$

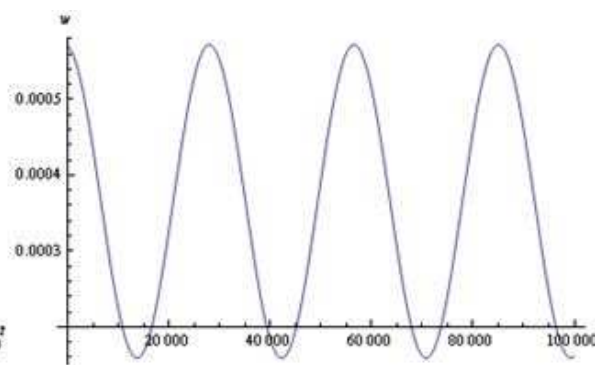


Fig. 2 - Velocidade Angular vs. Tempo,  $e = 0,4$

Percebemos nesses gráficos que a variação da excentricidade influencia a amplitude da velocidade angular, aumentando-a à medida em que ela cresce. Verificamos que este fato está coerente com os resultados das órbitas reais, obtidos pelo integrador.

As Figuras dos gráficos, a seguir, mostram resultados das simulações da função  $W$  com uma excentricidade fixa igual a 0,3 para semi-eixos maiores iguais a 20.000 km (Figura 3) e 50.000 km (Figura 4), respectivamente.

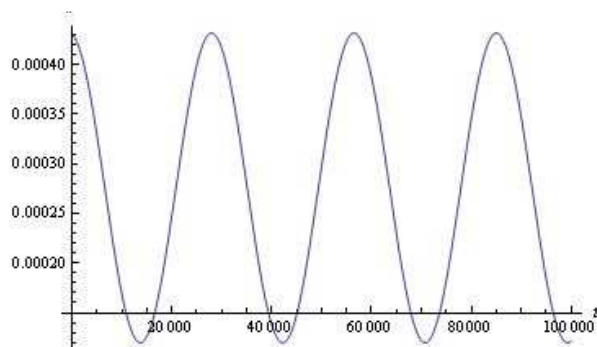


Fig. 3 - Velocidade Angular vs. Tempo,  $a = 20.000$  km

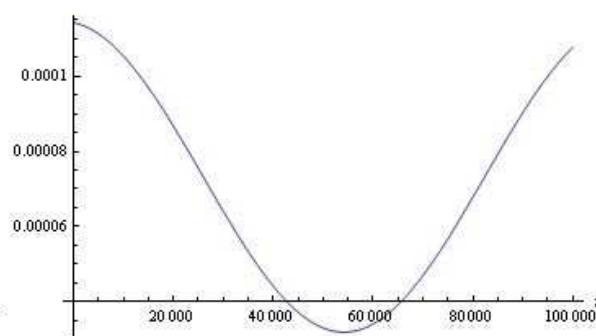


Fig. 4 - Velocidade Angular vs. Tempo,  $a = 50.000$  km

Estes resultados mostram uma dependência direta do semi-eixo maior com a amplitude da velocidade angular, reduzindo-a em amplitude à medida que aumenta. Além disso, o semi-eixo interfere na “abertura” da função no eixo do tempo, transladando os valores das raízes no tempo. Os comportamentos apresentados nos gráficos das Figuras 1 a 4 são verificados em diversos outros gráficos das nossas simulações. Com base nestes resultados e comportamentos, inferimos uma função velocidade angular dada por:

$$W(a, e, t) = \frac{2,86 \cdot 10^9 16,79^e (0,0002 - 0,0001 \cos[3,018 - 1,97 \cdot 10^7 \frac{1}{a} t]) \log[a]}{a^{\frac{3}{2}}}$$

As equações de Tschauner-Hempfel são não homogêneas, dadas por:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2x\dot{y} + \dot{x}y + w^2x + 2kxw^{\frac{3}{2}} \\ \ddot{y} &= -2w\dot{x} - \dot{w}x + w^2y - kw^{\frac{3}{2}} \\ \ddot{z} &= -kzw^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Com a equação da função  $W(t,a,e)$  pretendemos resolver analiticamente estas equações até o dia da apresentação no SEMIC.

## CONCLUSÃO

O objetivo desta pesquisa é o de encontrar uma função velocidade angular para solucionar analiticamente as equações de Tschauner-Hempel para a dinâmica relativa entre objetos espaciais. Os nossos resultados inferem sobre a utilidade da nova função velocidade angular, agora, descrita a partir das variáveis físicas do problema. Este fato permite-nos estudar diversos problemas já conhecidos, mas apenas para velocidades angulares constantes.

## REFERÊNCIAS

- AGNOR, C. B.; HAMILTON, D. P.** Neptune's Capture of its Moon Triton in a Binary-Planet Gravitational Encounter. *Nature*.441; 192-194, 2006.
- BENNER L. A., MCKINNON W. B.,** 1995, *Icarus*, 118, 155.
- CARUSI A., VALSECCHI G.,** 1979. Numerical Simulations of Close Encounters Between Jupiter and Minor Bodies, 2 edn. The University of Arizona Press, Tuscon, pp 391-416.
- CLOHESSY, W.H. E WILTSHIRE, R. S.** Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous. *Journal of the Aerospace Sciences*, pp. 653-659, 1960
- EVERHART E.,** 1973, *The Astronomical Journal*, 78, 316.
- PHILPOTT C. M., HAMILTON D. P., AGNOR C. B.,** 2010, *Icarus*, 208, 824.
- VIEIRA NETO, E., WINTER, O. C.** Time analysis for temporary gravitational capture. *A&A* 377, 1119-1127, 2001.
- VOKROUHLICKÝ, D.; NESRVORNÝ, D.; LIVISON, H. F.** Irregular Satellite Capture by Exchange Reactions. *The Astronomical Journal*.136; 1463-1476, 2008.
- TSCHAUNER, J. E HEMPEL, P.,** Rendezvous zueinem in ellittischerBahnumlaufenderZiel, *AstronauticaActa*, Vol 2, N° 02, pp. 104-109, 1965.