ESTUDO DOS GRUPOS CONTÍNUOS E SUA APLICAÇÃO NAS TEORIAS DA FÍSICA

Ana Camila Costa Esteves [1]; Milton Souza Ribeiro Miltão[2];
1. Bolsista PIBIC/CNPq, Graduanda em Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: milinhamd@gmail.com
2. Orientador, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, email: miltaaao@ig.com.br

PALAVRAS CHAVE: Grupos contínuos, Física de Partículas e Campos, Simetrias.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como tema principal os grupos contínuos da física. O estudo deste tema surgiu do interesse de se estudar a Física de Campos e Partículas, mas partindo do ponto de vista algébrico que descreve as teorias físicas. Assim, o objetivo do trabalho é estudar a teoria de grupos visando aplicá-la futuramente nos estudos da Física de Partículas e Campos.

A teoria de grupos (Baumslag e Chandler, 1968) é um tema da matemática que se relaciona com diversas ciências atuais. Pretende-se entender as relações que a teoria de grupos tem com a física, mas antes de relacionar os grupos com a física é necessário estudar inicialmente a teoria de grupos e as propriedades fundamentais que definem os diferentes tipos de grupos.

Como pretendemos estudar a Física de Campos, a aplicação dos grupos contínuos nas teorias físicas (Eisberg, 1979; Fock, 1968) torna-se um passo inicial fundamental, à medida que relacionaremos a noção de simetrias com os sistemas de referência utilizados na Física, em particular os sistemas de referência inerciais (Sudarshan e Mukunda, 1974; Santana, 1997; Goldstein, 1950; Landau e Lifshitz, 1967; Aldrovandi e Pereira, 2004; Lopes, 2005). Dessa forma, os conceitos de Grupo de Galileu e o de Poincaré serão construídos para os casos não relativístico e relativístico, respectivamente.

Para a compreensão das teorias físicas, estamos utilizando o arcabouço teórico da Mecânica Analítica (Lemos, 2007) que de forma sistemática serve de base para as teorias e leis gerais da Física (Mecânica Clássica, Termodinâmica, Eletromagnetismo, Mecânica Relativística, Mecânica Quântica e Mecânica Estatística).

Consequentemente, o estudo introdutório em teoria de grupos que estamos realizando nesse trabalho situa-se no cerne da nossa temática de pesquisa.

MATERIAL, MÉTODOS OU METODOLOGIA

O desenvolvimento deste trabalho se deu com uma leitura aprofundada de livros e trabalhos relacionados com a Teoria de Grupos. Para a sua compreensão foi necessário fazer um estudo dos seus pré-requisitos, o qual foi realizado primeiramente fazendo-se uma revisão de conceitos primordiais da matemática tais como conjuntos, relação binária, funções, entre outros. Em um segundo momento estudou-se as definições de simetrias, que se constitui como um elo que une os conjuntos aos grupos, principalmente a partir do conceito de grupo de simetrias. Só então, com o domínio de tais conteúdos, foi iniciado o estudo dos grupoides, subgrupos e grupos propriamente ditos.

Visto que este trabalho tem como objetivo o estudo da teoria de grupos para um posterior estudo das teorias de campos e partículas, tem sido feito um acompanhamento dos assuntos relacionados à teoria de campos e partículas. Tal processo é realizado por meio das participações das reuniões do grupo de pesquisa de Física de Partículas e Física Matemática, que promove discussões entre alunos e professores relacionadas ao referido tema.

O estudo teórico das teorias de grupos em conjunto com as participações nas reuniões constitui uma ferramenta ideal para a realização deste trabalho, visto que uma atividade complementa a outra. Ao passo que são estudados os modelos matemáticos que explicam as teorias físicas, são assimilados os conceitos físicos onde tais modelos matemáticos serão aplicados futuramente no decorrer deste trabalho.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO

Um grupo pode ser definido como um semigrupo com uma identidade *e* no qual cada elemento possui uma inversa. Uma definição mais formal para grupo é a seguinte: Um conjunto *G* não vazio com uma operação binária * em *G* é chamado de grupo se

1. Existe um elemento identidade, $e \in G$, tal que $\forall g \in G$, $e*g = g*e = g$ (relembrando que a identidade é única).
2. * é associativa. $(g_1 * g_2)*g_3 = g_1*(g_2*g_3)$; $g_1, g_2, g_3 \in G$.
3. $\forall g \in G$ existe um elemento inverso $g^{-1} \in G$, tal que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

Para identificar um grupo é necessário então que o conjunto *G* não seja vazio, que tenha uma operação binária em *G*, verificar que o grupoide *(G,*)* possui um elemento identidade, verificar que o grupoide é um semigrupo, ou seja, obedece à propriedade associativa e verificar que cada elemento de *G* possui uma inversa.

Sendo *(G, *)* um grupo com operação binária * e sendo *H* um subconjunto não vazio de *G*, dizemos que *H* é um subgrupo de *G* se a operação * restrita a *H* é uma operação binária em *H*, o que faz de *H* um grupo.

Esses conceitos definidos de grupos e subgrupos podem ser aplicados agora para o entendimento de isometrias no plano e simetrias.

Uma isometria é um mapeamento do plano Euclidiano nele mesmo que preserva as distâncias e pode ser denotada por $\sigma: E \rightarrow E$. Como as distâncias são preservadas, temos que $|\sigma(x1) - \sigma(x2)| = |x1 - x2|$, ou seja, a distâncias entre as pré-imagens é a mesma que a distância entre as imagens. Existem quatro tipos de isometrias planas que são: **Translação**, deslocamento em uma dada direção de uma dada distância, **rotação** em torno de um dado ponto, o centro de rotação, de um dado ângulo**, reflexão**, transformação no plano que deixa uma linha fixa e que inverte a orientação, **reflexão com deslizamento**, transformação que combina uma reflexão numa dada linha com uma translação de uma dada distância numa direção paralela à linha de reflexão.

Podemos chamar de simetria de um conjunto *C* no plano Euclidiano a uma isometria que mapeia este conjunto nele mesmo, ou seja, a simetria equivale-se a uma operação binária, que é um mapeamento de um conjunto nele mesmo. A ideia de simetria de um conjunto *C* será exemplificada a partir das simetrias do quadrado.

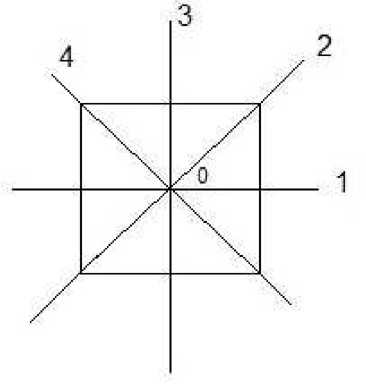

Figura 1- Linhas 1, 2, 3 e 4 de reflexões do quadrado.

As simetrias do quadrado da Figura 1 são as reflexões em torno das linhas 1, 2, 3 e 4, a simetria identidade e as simetrias de reflexão em torno do centro de rotação 0 de um quarto de volta, meia volta e três quartos de volta. As simetrias de reflexão serão denotadas por M_1, M_2, M_3 e M_4, a identidade por *Id* e as simetrias de rotação por R_1, R_2 e R_3.

Pode-se provar que o conjunto das simetrias do quadrado, dado por *S = {M1, M2, M3, M4, Id, R1, R2 e R3}*, corresponde a um grupo, que será chamado de grupo de simetrias do quadrado. Para provar isso, utilizaremos a tabela 1, na qual estão representadas todas as possíveis simetrias do quadrado. Essa tabela é uma tabela onde se pode enxergar o resultado da aplicação de duas simetrias seguidas. A operação binária pode ser dada pela aplicação de duas simetrias seguidas. Por definição, uma operação binária é um mapeamento de *S* em *S*, assim, a aplicação de duas simetrias do quadrado deve ter como resultado uma simetria do quadrado, que pertence a *S*. Tal condição é satisfeita, pois como se pode notar na tabela 1 a aplicação da simetria identidade duas vezes resulta em uma simetria identidade.

Para ser um grupo é necessário que o conjunto tenha um elemento neutro. Como se sabe, existe a simetria de identidade *Id*, portanto essa condição também é satisfeita. Também é necessário que cada elemento de S possua uma inversa, e pode-se observar na tabela que para cada elemento, existe outro elemento tal que a aplicação dos dois resulta no elemento identidade, satisfazendo esta condição. A última condição é que a operação binária deve ser associativa. Como exemplo tomaremos *(R1*R2)*M4* que resultará em *M3*, e *R1*(R2*M4) = M3*, satisfazendo à ultima condição. Assim está provado que existe um grupo constituído do conjunto de simetrias do quadrado e uma operação binária *, denotado por *(S, *)*.

Tabela 1: Tabela de multiplicação das simetrias do quadrado.

	Id	**R_1**	**R_2**	**R_3**	**M_1**	**M_2**	**M_3**	**M_4**
Id	Id	R_1	R_2	R_3	M_1	M_2	M_3	M_4
R_1	R_1	R_2	R_3	Id	M_2	M_3	M_4	M_1
R_2	R_2	R_3	Id	R_1	M_3	M_4	M_1	M_2
R_3	R_3	Id	R_1	R_2	M_4	M_1	M_2	M_3
M_1	M_1	M_4	M_3	M_2	Id	R_3	R_2	R_1
M_2	M_2	M_1	M_4	M_3	R_1	Id	R_3	R_2
M_3	M_3	M_2	M_1	M_4	R_2	R_1	Id	R_3
M_4	M_4	M_3	M_2	M_1	R_3	R_2	R_1	Id

Os resultados apresentados neste trabalho devem ser entendidos como resultados de um estudo, pois devido ao curto tempo de seis meses por causa de uma substituição de bolsista não foi possível um aprofundamento tão grande na teoria de grupos e sua consequente aplicação na física. O que foi feito foi um trabalho voltado para o entendimento do conceito de grupo, que foi melhor visualizado com a ideia de simetrias e grupos de simetrias. Assim, os resultados foram satisfatórios à medida que foi possível compreender o significado de grupo e como este se relaciona com as simetrias e a física.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi estudado o conceito de grupo, que é um grupoide que obedece à determinadas propriedades. Este estudo se deu com o olhar voltado para a física, visando um entendimento da relação que determinados grupos têm com as teorias da física. Em particular, os grupos de Poincaré e de Galileu unem a teoria de grupos com os referenciais da física, à medida que as transformações de Poincaré e Galileu são transformações de referenciais, que são um tópico muito importante na física. Foi mostrado que o conjunto de simetrias do quadrado constitui um grupo com uma operação binária, o que mostra a abrangência que os grupos têm. Assim, a teoria de grupos é um tema que possui inúmeras ligações com as mais diversas áreas das ciências, e o seu estudo já rendeu inúmeras descobertas para a física, inclusive na física de partículas e campos, cujo estudo é um dos principais objetivos deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALDROVANDI, R. e PEREIRA, J. G.: Notes for a course on Classical Fields. Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, March-June / 2004.

BASSALO, J. M. F. e CATTANI, M. S. D. Teoria de grupos para físicos. 1ª ed. Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Agosto/2005.

BAUMSLAG, B. e CHANDLER, B. Group Theory. McGraw-Hill, New York, 1968.

EISBERG, R. M. Fundamentos da Física Moderna, Guanabara Dois, Rio de Janeiro - RJ, 1979.

FERREIRA, A. L. Um estudo dos sistemas de referência e sua relação com a teoria de grupos. Monografia de Graduação, Universidade Estadual de Feira de Santana, 2009.

FOCK, V. A. Princípios da Mecânica Quântica Moscow: Mir, 1976.

GOLDSTEIN, H.: Classical Mechanics. Cambridge: Addison – Wesley, 1950.

LANDAU, L. e LIFSHITZ, E. : Teoria do Campo. Moscow: Mir, 1967.

LEMOS, N. A. Mecânica analítica. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. 386p.

LOPES, J. A. L.: Estrutura Quântica da Matéria - do Átomo Pré-Socrático às Partículas Elementares. 3ª Ed, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2005.

RODITI, I. Padrões e simetrias: Estética na Física e na Matemática. CBPF, Rio de Janeiro, 2003.

SANTANA, A. E. : Sobre covariância Galileana e o campo de Schrödinger. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol.19, nº 1, março, 1997.

SUDARSHAN, E. C. G and MUKUNDA, N., Classical Dynamics: A modern perspective, John Wiley & Sons, New York, 1974).