Álgebra de Quatérnios

Jucineide Silva Santos Maurício de Araujo Ferreira
1. Bolsista PIBIC/Fapesb, Graduanda em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de santana, e-mail:jucy.mat.uefs@hotmail.com
2. Orientador, Departamento DEXA, Universidade Estadual de Feira de santana, e-mail: mauriciodearaujo@yahoo.com.br

August 22, 2011

Palavras-chaves: Números complexos; Álgebra de quatérnios.

1 Introdução

A álgebra de quatérnios teve origem nos números complexos, quando William Rowan Hamilton (1805–1865) apresentou o primeiro conceito moderno dos complexos como pares ordenados de reais e tentou generalizar esta idéia para o espaço tridimensional. Após inúmeras tentativas verificou-se que não era possível a existência de um complexo tri-dimensional. Com isso, Hamilton descobriu os quatérnios, que é uma álgebra de dimensão quatro sobre o corpo dos números reais e que possui todas as propriedades de um corpo, exceto a comutatividade da multiplicação. A álgebra dos quatérnios foi a primeira álgebra não-comutativa da história.

2 O equívoco de um complexo tri-dimensional

Hamilton era um matemático e físico que aspirava encontrar uma álgebra que representasse e operasse vetores não só no $\mathbb{R}^2$. Hamilton tinha conseguido operar vetores no plano através de uma identificação dos complexos da forma $a + bi$ com os pares ordenados de reais da forma (a, b).

Seria então desejável fornecer para $\mathbb{R}^3$ uma estrutura de álgebra que permitisse operar vetores. Tal álgebra teria grande aplicabilidade na física, uma vez que quando várias forças que agem sobre um corpo, elas não estão necessariamente num plano. Hamilton tentou provar a possibilidade de um complexo ser tri-dimensional por muitos anos, mas não conseguiu.

Vamos verificar que é possível estabelecer em $\mathbb{R}^3$ uma estrutura de álgebra associativa. Para isso, seja $w = (\alpha, \beta, \gamma)$ um vetor do $\mathbb{R}^3$. Vamos escrever $w = \alpha + \beta i + \gamma j$ com a identificações onde $1 = (1, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0)$ e $j = (0, 0, 1)$. Vamos supor que a multiplicação ij está definida em $\mathbb{R}^3$. Como $\{1, i, j\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, podemos escrever

$$ij = a + bi + cj,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Multiplicando i à esquerda em ambos os lados da equação acima temos

$$i(ij) = i(a + bi + cj) = ia + i^2 b + i(cj) = ai - b + c(ij).$$

Logo,

$$i^2 j = -j = ai - b + c(ij).$$

Substituindo ij por $a + bi + cj$ na equação acima temos

$$-j = ai - b + c(a + bi + cj) = ai - b + ca + cbi + c^2 j.$$

Assim,

$$(ca - b) + (a + cb)i + (c^2 + 1)j = 0.$$

Observe que acima temos uma combinação linear dando zero. Como $\{1, i, j\}$ são linearmente independentes, devemos ter $c^2 + 1 = 0$, contradizendo a hipótese de que $c \in \mathbb{R}$. Portanto, não é possível a existência de um número complexo tri-dimensional sobre os reais.

3 Quatérnios

Depois de tentar sem sucesso uma generalização para os complexos como ternas de reais, Hamilton, em um momento inesperado de pensamento, descobriu a fórmula fundamental dos quatérnios $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, que daria ao $\mathbb{R}^4$ uma estrutura de álgebra associativa.

Definição 3.1 *Definimos a álgebra dos quatérnios Q como sendo o $\mathbb{R}$-espaço vetorial*

$$\mathbb{Q} = \{x + yi + zj + wk \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$$

de dimensão quatro. A soma de dois quatérnios quaisquer é obtida da seguinte forma: $(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = (a + a_1) + (b + b_1)i + (c + c_1)j + (d + d_1)k$. O produto dos elementos básicos $1, i, j, k$ é definido pela tábua:

$$1i = i, \quad 1j = j, \quad 1k = k;$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1;$$

$$ij = -ji = k;$$

$$jk = -kj = i;$$

$$ki = -ik = j.$$

O produto é estendido para todos os elementos de Q distributivamente. Com isso, $\mathbb{Q}$ tem também uma estrutura de anel associativo. Portanto, Q é uma álgebra associativa de dimensão 4 sobre o corpo dos números reais.

Note que com a tábua de multiplicação acima, fica evidente que a multiplicação não é comutativa. Além disso, temos uma identificação dos reais com os quatérnios da forma $\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$, tais que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Definição 3.2 *Dado um quatérnio $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \in Q$, definimos o conjugado de α o elemento $\overline{\alpha} = \alpha_0 - \alpha_1 i - \alpha_2 j - \alpha_3 k$.*

Definição 3.3 *Dado um quatérnio $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$, definimos a norma de α como sendo o número real*

$$\parallel \alpha \parallel = \overline{\alpha}\alpha = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

Dado um quatérnio $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \in Q$, com $\alpha \neq 0$, temos que $\parallel \alpha \parallel \neq 0$. Seja $\beta = \overline{\alpha} / \parallel \alpha \parallel$. Note que

$$\alpha\beta = \alpha \frac{\overline{\alpha}}{\parallel \alpha \parallel} = \frac{\parallel \alpha \parallel}{\parallel \alpha \parallel} = 1.$$

Assim, $\beta = \alpha^{-1}$, donde concluímos que a álgebra dos quatérnios é uma álgebra com divisão, isto é, todo elemento não nulo tem inverso. Portanto os quatérnios tem todas as propriedades de um corpo, exceto a comutatividade da multiplicação.

4 Quatérnios generalizados

Já sabemos que os quatérnios de Hamilton são álgebras com divisão sobre os reais. Então é natural perguntar se a álgebra dos quatérnios podem ser generalizadas para corpos arbitrários.

Definição 4.1 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica $\neq 2$ e sejam $u, v \neq 0$ com $u, v \in \mathbb{K}$. Definimos $(u, v)_{\mathbb{K}}$ a álgebra dos quatérnios generalizados como sendo o $\mathbb{K}$-espaço vetorial*

$$(u, v)_{\mathbb{K}} = \{x + yi + zj + wk \mid x, y, z, w \in \mathbb{K}\}.$$

O produto é definido pela tábua:

$$i^2 = u, \quad j^2 = v, \quad k^2 = -uv;$$

$$ij = -ji = k;$$

$$jk = -kj = i;$$

$$ki = -ik = j;$$

e estendido distributivamente para todos os elementos de $(u, v)_{\mathbb{K}}$.

A soma de quatérnios generalizados é análoga com a soma quatérnios sobre os reais. Pode-se verificar que $(u, v)_{\mathbb{K}}$ tem sempre uma estrutura de álgebra associativa sobre $\mathbb{K}$.

A questão é se $(u, v)_{\mathbb{K}}$ tem uma estrutura de álgebra com divisão. Já verificamos que não se tem sempre uma resposta positiva. Por exemplo, fazendo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o corpo dos números complexos, pode-se mostrar que $(u, v)_{\mathbb{K}}$ nunca é uma álgebra de divisão, independentemente da escolha de u e v. A partir deste ponto, pretendemos investigar quando uma álgebra de quatérnios sobre o corpo dos números racionais é uma álgebra de divisão.

5 Material, métodos ou metodologia

A nossa pesquisa é de natureza teórica e estamos na fase de revisão bibliográfica.

6 Resultados e/ou discussão

Como estamos no início da pesquisa ainda não obtivemos grandes resultados mas, a discussão desses conteúdos apresentados neste trabalho servirá de alicerce para o desenvolvimento da pesquisa sobre a Álgebra dos Quatérnios sobre o corpo dos números Racionais.

7 Considerações finais

Atualmente tem poucos estudiosos que pesquisam sobre os quatérnios, e por isso, é um campo do conhecimento matemático que precisa ser estudado.O intuito desta pesquisa fazer novas descobertas sobre os quatérnios, pois, os mesmos tem aplicações não só na matemática mas, também em outras áreas do conhecimento.

8 Referências bibliográficas

BIRKHOFF, G; MACLANE, S.1980. Álgebra Moderna Básica. 4ªedição. Rio de Janeiro: Guanabara Dois S.A.

FELZENSZWALB, B.1979. Álgebras de Dimensão Finitas. Rio de Janeiro,IMECC.*In*: 12°Colóquio Brasileiro de Matemática.

GONÇALVES, Adilson.2009. Introdução à Álgebra.5ªed. Rio de Janeiro:IMPA.

POLCINO, CÉSAR.M. 2004. Aneis com divisões: Uma introdução de sua história.