

MULTIFRACTALIDADE EM MEIOS ESTRATIFICADOS QUASE PERIÓDICOS

Clebson dos Santos Cruz¹; José Carlos Oliveira de Jesus² e Antônio César do Prado Rosa Jr³

1. Bolsista FAPESB-UEFS, Graduando em Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail:

clebsonsacruz@yahoo.com.br;

2. Orientador, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail:

aprendizfaced@gmail.com

3. Participante do projeto, Instituto de Ciências Ambientais e Desenvolvimento Sustentável, Universidade Federal da Bahia, e-mail: acprj2@yahoo.com.br

PALAVRAS-CHAVE: Multifractalidade, propriedades óticas, quase periodicidade

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas o estudo das propriedades eletromagnéticas de meios estratificados (multicamadas) tem sido de grande importância para a produção de materiais cujas aplicações são voltadas tanto para a óptica quanto para a eletrônica. As condições de contorno nas interfaces entre camadas afetam o comportamento do campo eletromagnético que se propaga pelo meio estratificado, ou seja, as propriedades óticas dependem não apenas das substâncias que compõe o meio, mas da forma como as camadas estão ordenadas, aqui aparece a importância do estudo desses sistemas. Segundo Kohmoto (1987), a propagação de ondas eletromagnéticas em multicamadas quase periódicas cuja ordenação segue uma seqüência de Fibonacci, revela um comportamento multifractal para a medida do coeficiente de transmissão em função do caminho ótico, corroborados por resultados teóricos e de simulação numérica do coeficiente de transmissão em função do comprimento de onda. Para efeito de simulação numérica, se duas ou mais camadas com diferentes índices de refração forem arranjadas segundo uma seqüência de Fibonacci, o resultado desse arranjo é uma multicamada quase-periódica, onde a quase-periodicidade estaria relacionada à repetição das propriedades óticas das camadas, e a “aleatoriedade” estaria relacionada ao modo como ordenamos as mesmas. Neste trabalho reproduzimos os resultados obtidos por Kohmoto, além da proposta de um experimento didático onde pretendemos avaliar esses resultados.

METODOLOGIA

No estudo das propriedades eletromagnéticas de meios estratificados é extremamente importante compreender de que maneira ocorre a propagação da luz através das camadas. Vamos analisar a propagação de uma onda plana através de uma multicamada composta por dois materiais (A e B) de índices de refração diferentes. Se olharmos a propagação do campo eletromagnético na interface, as condições de contorno para as componentes tangenciais dos campos elétricos e magnéticos nos dão:

$$E_A^{(1)} + E_A^{(2)} = E_B^{(1)} e^{i\delta_B} + E_B^{(2)} e^{-i\delta_B} \quad (1)$$

$$n_A \cos(\theta_A) [E_A^{(1)} - E_A^{(2)}] = n_B \cos(\theta_B) [E_B^{(1)} e^{i\delta_B} - E_B^{(2)} e^{-i\delta_B}] \quad (2)$$

Onde $\delta_B = k_B \cdot d \cdot \cos(\theta_B)$ é o caminho ótico. A partir das equações um e dois obtemos a matriz de transferência entre as camadas A e B, que pode ser simplificada através das transformações abaixo:

$$E_+ = E^{(1)} + E^{(2)} \quad E_- = E^{(1)} - E^{(2)}/i$$

Logo obtemos:

$$(3) \begin{bmatrix} E_{+A} \\ E_{-A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_B \cos(\theta_B)/n_A \cos(\theta_A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\delta_B) & -\text{sen}(\delta_B) \\ \text{sen}(\delta_B) & \cos(\delta_B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{+B} \\ E_{-B} \end{bmatrix}$$

A equação (3) se resume a:

$$\begin{bmatrix} E_{+A} \\ E_{-A} \end{bmatrix} = T(AB)T(B) \begin{bmatrix} E_{+B} \\ E_{-B} \end{bmatrix} \quad (4)$$

A partir das equações três e quatro temos que $T(AB)$ é a matriz que representa a propagação da onda eletromagnética através da interface AB, e $T(B)$ descreve a mudança de fase devido a propagação dentro da camada B. Por simetria obtemos:

$$T(BA) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_A \cos(\theta_A)/n_B \cos(\theta_B) \end{bmatrix} \quad T(A) = \begin{bmatrix} \cos(\delta_A) & -\text{sen}(\delta_A) \\ \text{sen}(\delta_A) & \cos(\delta_A) \end{bmatrix}$$

Então podemos escrever a expressão do coeficiente de transmissão:

$$T = \frac{4}{\sum_{i,j=1}^2 M_{ij}^2 + 2 \cdot \det[M_J]} \quad (5)$$

Onde M_{ij} : é a matriz de transferência total do meio, ou seja, o produto das matrizes de propagação.

Conhecido a forma como o campo se propaga nas camadas e nas interfaces podemos apresentar a construção das camadas. Considerando um meio estratificado composto por dois tipos de materiais A e B ordenados segundo uma seqüência de Fibonacci, podemos organizar as camadas segundo a seguinte fórmula de recorrência:

$$S_{J+1} = \{S_{J-1}, S_J\}$$

Onde $S_0 = \{B\}$ e $S_1 = \{A\}$. Portanto podemos associar a matriz de transferência total à seqüência de Fibonacci através da fórmula de recorrência para a construção das camadas, através do produto das matrizes de propagação (T) podemos escrever a matriz de transferência total $M(J)$ relacionada a cada geração (J) da seqüência de Fibonacci. Logo obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$M(J) = M(J-2) \cdot M(J-1); \text{ se } J \text{ for um número par}$$

$$M(J) = M(J-2) \cdot T(AB) \cdot M(J-1); \text{ se } J \text{ for um número ímpar.}$$

Onde $M(1) = T(A)$ e $M(2) = T(B) \cdot T(BA) \cdot T(A)$.

Conhecido como o campo eletromagnético se propaga e como montamos os meios estratificados através da seqüência de Fibonacci, utilizamos o software científico SCILAB (freeware), e a partir do modelo matemático discutido, construímos um algoritmo para calcular o coeficiente de transmissão em função do caminho ótico, foi utilizado para a simulação computacional camadas de vidro (índice de refração $n=1.52$) e ar (índice de refração $n=1$). Construímos o algoritmo de modo que fixamos o número camadas e variarmos somente a espessura.

RESULTADOS

Tomamos a incidência normal onde $\theta_A = \theta_B = 0$ e escolhemos a fase $\delta_A = \delta_B = \delta$, com o intuito de simplificar o cálculo das matrizes de transferência (Kohmoto, 1987). Imprimindo o gráfico do coeficiente de transmissão pelo caminho ótico (ambos adimensionais) obtemos:

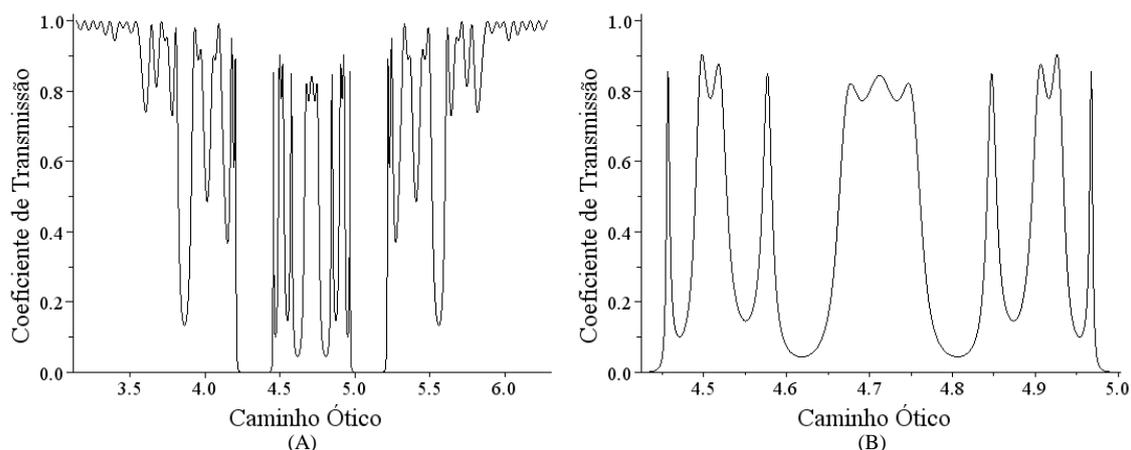


Figura 1: Gráfico da nona geração da seqüência de Fibonacci (55 Camadas), onde variamos a escala do caminho ótico no gráfico A e obtemos o gráfico B.

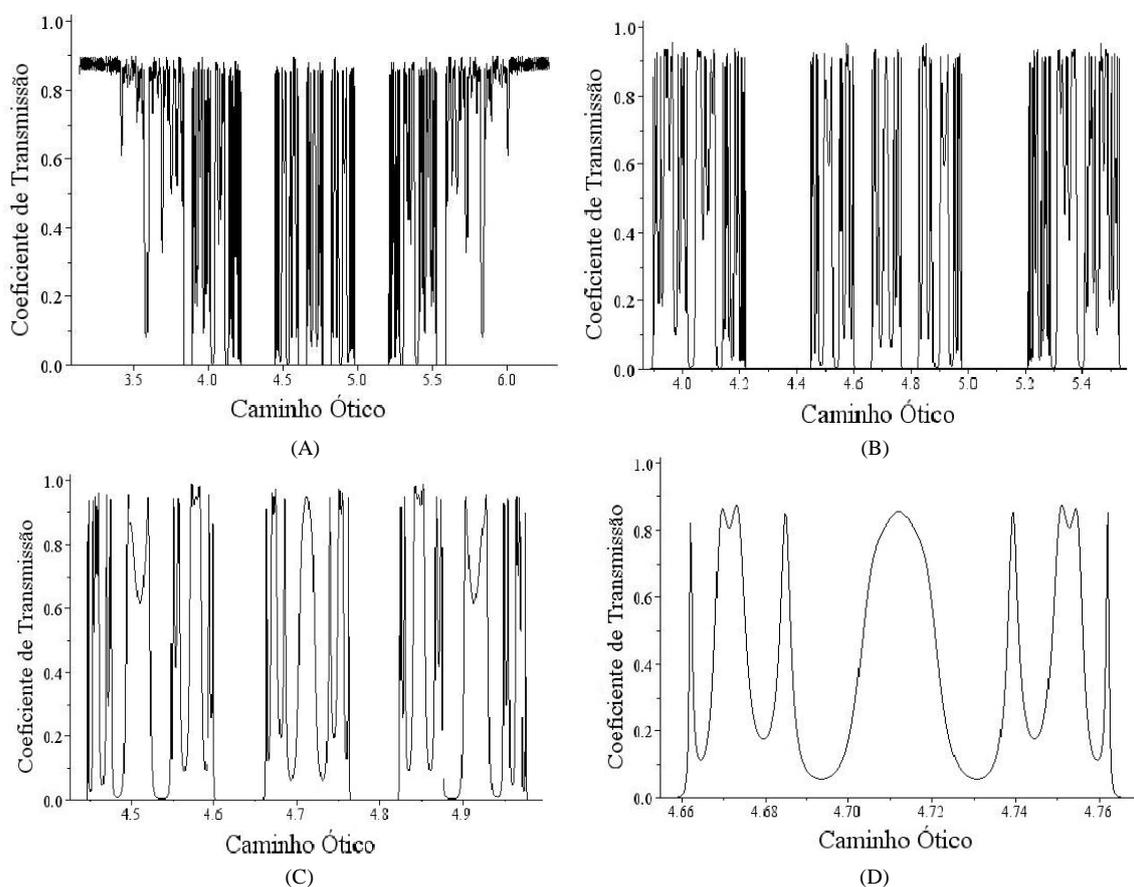


Figura 2: Gráfico da décima segunda geração da seqüência de Fibonacci (233 Camadas), onde variamos a escala no caminho ótico do gráfico A e obtemos os demais, podemos observar claramente a invariância por escala nos gráficos B e C.

Portanto conseguimos reproduzir os resultados obtidos por Kohmoto (gráficos A e B da figura 1 e gráficos A e D da figura 2), onde podemos observar com clareza o comportamento multifractal do coeficiente de transmissão através de sua invariância por escala evidenciada principalmente nos gráficos da figura 2.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos gráficos obtidos podemos observar a invariância por escala do comportamento do coeficiente de transmissão independente da geração da seqüência de Fibonacci que tomamos. Isto caracteriza o comportamento multifractal do coeficiente de transmissão, conforme é enfatizado por Kohmoto.

Como perspectiva futura, pretendemos aplicar o método matricial proposto por Pochi Yeh (1979) para a propagação de ondas eletromagnéticas em meios estratificados, a fim de realizarmos uma simulação computacional semelhante à apresentada neste trabalho. Também pretendemos realizar de um experimento onde utilizaremos materiais de fácil aquisição como acrílico, vidro, água e óleo, com o intuito de avaliarmos os resultados obtidos por Kohmoto.

REFERÊNCIAS

- MAHITO KOHMOTO *et al.* Phys. Rev. Lett., 58, 2436 (1987)
POCHI YEH, J. Opt. Soc. Am. 69, 742-756 (1979)
ARFKEN, Georg B; WEBER, Hans J., 2007. Física Matemática: métodos matemáticos para engenharia e física. Rio de Janeiro: Campus.
SHADIKU, Matthew N. O., 2004. Elementos de Eletromagnetismo. São Paulo: Bookman. 3ª. Edição.
REITZ, John R.; MILFORD, Frederick J.; CHRISTY, Robert W. , 1982 Fundamentos da teoria da eletromagnética. Rio de Janeiro: Campus.
BARROSO, L. C., BARROSO, M. A., CAMPOS, F. F., CARVALHO, M. L. B. & MAIA, M. L., 1987. Cálculo Numérico (Com Aplicações), 2.ed. São Paulo, Editora Harbra.