Problema restrito de 3 corpos regularizado e análise de medida

Erich Monteiro Bailly Andersen Cavalcanti [1]; **Antônio Delson Conceição de Jesus**[2]

1. Bolsista PROBIC, Graduando em Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, email: erichcavalcanti@gmail.com
2. Orientador, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, email: a1d1j1@gmail.com

PALAVRAS-CHAVE: Estabilidade, Problema Restrito de 3 corpos, Regularização

INTRODUÇÃO

O problema da interação gravitacional de N corpos apresenta solução analítica no caso de N=2 e esta solução é dada pelas cônicas. O sistema Terra-Lua, considerando-o isolado do restante do universo, pode ser resolvido como um problema de 2 corpos, cuja solução mostra que a Lua move-se em elipse kepleriana perfeita em torno da Terra; a abordagem do sistema Terra-Lua como um problema ideal de dois corpos não sobrevive à perturbação gerada pelo Sol, pelos planetas do Sistema Solar e pelo resto do universo. Estas perturbações fazem com que a trajetória da Lua em torno da Terra se dê através de uma elipse kepleriana perturbada. A partir de $N \geq 3$ não existe solução analítica completa para o problema geral, mesmo no caso ideal onde não há perturbações. Esforços da comunidade científica são realizados em dois caminhos: encontrar soluções para o problema geral e encontrar soluções para problemas simplificados. O problema de 3 corpos geral confinado a um plano apresenta as soluções clássicas encontradas por Euler (1772) e Lagrange (1772), respectivamente a solução colinear e a solução eqüilátera – onde os corpos se distribuem nos vértices de um triângulo eqüilátero. Em ambas há uma restrição sobre as condições iniciais e, portanto, são aplicáveis a apenas alguns casos. Recentemente foi proposta outra solução para o problema geral de 3 corpos por Montgomery (2000), onde os corpos devem ter massas iguais e movimentam-se seguindo um formato de oito. Um exemplo clássico de simplificação é o problema restrito de 3 corpos onde:

- Há dois primários de massa considerável e um terceiro corpo em estudo, com massa desprezível;
- Os primários movimentam-se com velocidade angular constante em torno do centro de massa comum em órbitas perfeitamente circulares. Assim, se torna possível traçar um eixo girante que liga ambos os primários;
- O movimento do corpo em estudo é restrito ao plano de órbita dos primários;
- O estudo é comumente realizado segundo um referencial sinódico, baseado no eixo girante que liga os dois primários, de modo que o movimento dos primários não seja observado neste referencial.

Tal problema apresenta somente uma integral do movimento, a integral de Jacobi e, apesar de não ter uma solução analítica, trás resultados importantes como as curvas de velocidade zero, as quais permitem saber as regiões de movimento possível, e a localização dos pontos de equilíbrio lagrangeanos. Ainda assim, todo este estudo do problema de 3 corpos é um estudo ideal onde não são consideradas perturbações gravitacionais do restante do universo, nem perturbações de outras forças que não são gravitacionais, tais como a pressão de radiação solar, o albedo, etc. Estas perturbações introduzem erros nos valores das variáveis e modificam a solução do problema. Por outro lado, ao problema ideal está associado o problema da medida. Durante uma missão espacial, onde podemos considerar o sistema de 3 corpos Terra, Lua e Satélite, os valores das posições e velocidade do satélite registrados pelos equipamentos não são exatamente aqueles que são calculados teoricamente pelas equações, devido ao erro associado as equipamentos de medida (radar, etc.). Então, torna-se necessário a realização de um “tratamento estatístico” dos dados fornecidos por estes equipamentos de medida às estações de rastreamento da terra, com a finalidade de se encontrar os valores reais médios mais próximos do fenômeno medido.

METODOLOGIA

Neste trabalho analisamos o problema restrito de três corpos aplicado ao movimento de um satélite em torno da terra, sob atração gravitacional desta e da Lua. Na primeira etapa consideramos um problema ideal. Na segunda etapa levamos em consideração a não idealidade nas variáveis de posição e velocidade com respeito aos desvios/erros decorrentes do processo de medidas. Desta forma realizamos uma estatística do problema restrito de três corpos, considerando erros do tipo gaussiano e uniforme. Em ambas as etapas foram preparados códigos em Fortran, com uso do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, que simulam órbitas para o corpo em estudo a partir das condições iniciais. Uma estratégia utilizada para verificar a funcionalidade do código se deu na busca dos pontos lagrangeanos. A primeira implementação foi gerada diretamente das equações do movimento do problema restrito de três corpos, segundo uma abordagem hamiltoniana, utilizando momento generalizado, ao invés da velocidade generalizada. As equações do movimento são:

$$\frac{dQ_1}{dt} = P_1 + Q_2$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = P_2 - Q_1$$

$$\frac{dP_1}{dt} = P_2 - Q_1\left(\frac{M}{R_1^3} + \frac{1-M}{R_2^3}\right) + M(1-M)\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -P_1 - Q_2\left(\frac{M}{R_1^3} + \frac{1-M}{R_2^3}\right)$$

onde, M é a massa do primeiro primário e *(1-M)* a massa do segundo primário; Q_1 e Q_2 são as coordenadas do corpo de estudo, P_1 e P_2 são os momentos conjugados associados às coordenadas, R_1 e R_2 são, respectivamente, a distância do corpo de estudo ao primeiro e segundo primário. Na segunda implementação utilizamos o modelamento matemático de regularização de modo a remover as singularidades do problema. As singularidades do problema restrito de três corpos estão localizadas na posição dos dois corpos primários, quando o corpo de estudo se aproxima das singularidades sua velocidade cresce. O crescimento da velocidade atrapalha o método de Runge-Kutta, trazendo erros à resolução numérica do problema. Tais erros podem ser percebidos na constante de Jacobi, a qual sofre variações devido a falhas no método, mas deveria teoricamente se manter constante durante toda a implementação por ser uma constante do movimento. A regularização, ao remover as singularidades, traria como vantagem a remoção de possíveis falhas ao método. A equação do movimento no problema regularizado é:

$$\omega'' + 2i\left|f'(\omega)\right|^2\omega' = grad_\omega\left(\Omega\left|f'(\omega)\right|^2\right)$$

Esta equação está escrita no formato complexo que é mais prático de utilizar do que a notação vetorial. Neste caso, $\omega = u + iv$ é a nova variável complexa para posição, Ω representa a energia potencial do sistema e $|f'(\omega)|^2$ é escolhido pelo tipo de regularização a ser realizado. É este termo que tem a função de eliminar a singularidade presente devido à energia potencial.

RESULTADOS

Os nossos resultados preliminares mostraram um bom funcionamento do código implementado no caso ideal. As Figuras de 1 a 3 mostram resultados da nossa abordagem inicial, os quais estão condizentes com o esperado na literatura, todos eles para o caso em que uma das massas representa 20% da massa do sistema. Na Figura 1 estão mostradas diversas órbitas para posições iniciais diferentes e em todas elas a velocidade inicial é nula. Na Figura 2 são apresentadas diversas órbitas com a mesma constante de Jacobi (*C*=*3,*59), as quais estão presas dentro do limite dado pelas curvas de velocidade zero. Na Figura 3 observa-se diversas curvas de velocidade zero.

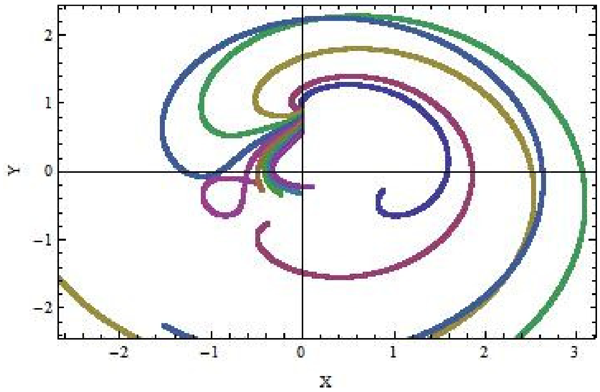

Figura 1: Órbitas para velocidade inicial nula, x=0 e y=0,60; 0,64; 0,68; 0,72; 0,76; 0,80; 0,84; 0,88; 0,92; 0,96.

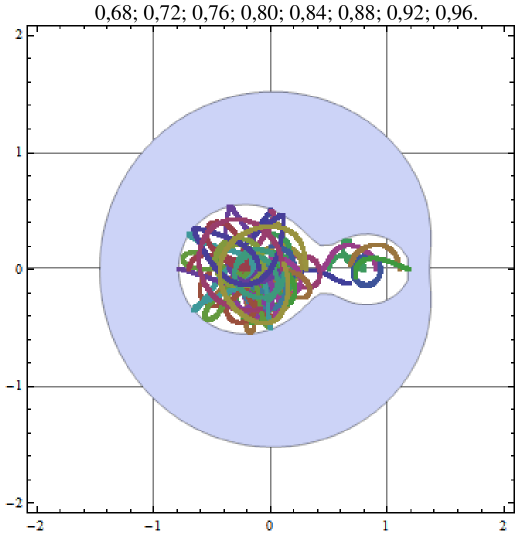

Figura 2: Diversas órbitas para o caso em que a constante de Jacobi é 3,59

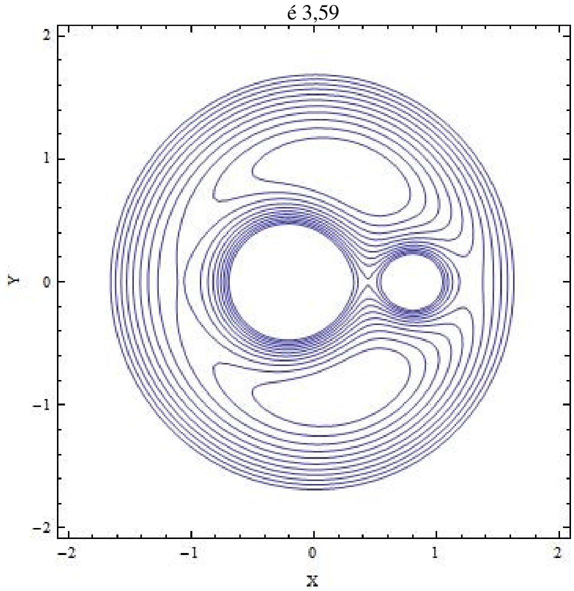

Figura 3: Curvas de velocidade zero para a constante de Jacobi variando de C=4,0 até C=3,0.

Os resultados para o caso em que consideramos os erros mostram uma configuração de órbitas possíveis e uma órbita média representativa do fenômeno estudado. Um resultado similar é encontrado para caso regularizado. Uma comparação entre o modelo ideal e o não ideal permitiu perceber que o problema não ideal está mais próximo do fenômeno realista. A análise comparativa entre o método regularizado e o não regularizado demonstrou a eficiência do método da regularização.

CONCLUSÃO

Conclui-se deste trabalho que, apesar de trazer boas informações, o problema restrito de três corpos não descreve perfeitamente alguns sistemas, sendo necessário estudar problemas não ideais. Neste trabalho iniciamos o estudo de problemas não ideais ao tratar de erros das nas medidas e verificar suas conseqüências. É necessário, ainda, tratar de perturbações derivadas de outras forças gravitacionais (outros corpos celestes) e não gravitacionais, tais como a pressão de radiação solar, o albedo, etc., e verificar quais deles são mais significativos. Conclui-se também que o método de resolução numérica pode apresentar erros, mas que uma modelagem matemática alternativa pode contornar estes erros.

REFERÊNCIAS

MURRAY C.D., DERMOTT S.F., 1999, Solar System Dynamics. Cambridge University Press.

SZEBEHELY, VICTOR, 1967, Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies. University of Texas Press.

ROY, A.E.,1982 , Orbital Motion. Adam Hilger Ltd.

CHENCINER, A., MONTGOMERY, R., 2000, A remarkable periodic solution of the three body-problem in the case of equal masses. Annals of Mathematics, 152 (2000), 881-901