Anais do XIV Seminário de Iniciação Científica da Universidade Estadual de Feira de Santana, UEFS, Feira de Santana, 18 a 22 de outubro de 2010

AS EQUAÇÕES DE MAXWELL NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

Guilherme S. A. Sadovski [1]; Milton Souza Ribeiro Miltão[2]; Prof. Dr. Alexandre Leite Gadelha[3]

1 Graduando em Bacharel Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: guilhermesadovski@gmail.com

2 Orientador do Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: miltaaao@ig.com.br

3 Co-orientador, Departamento de Física, Universidade Federal da Bahia. Email: algadelha@gmail.com

PALAVRAS - CHAVE: Transformações de Coordenadas, Covariância Galileana, Relatividade Restrita, Eletromagnetismo**.**

INTRODUÇÃO

Um dos principais pilares da Física, senão o principal, é o conceito de simetria. Este estudo se concentrou na análise de referenciais inerciais e nas transformações que os ligam, de modo a deixar as Leis Físicas covariantes. O conceito de simetria das Leis Físicas por troca de referencial, explicita o surgimento de uma nova Mecânica, além da Newtoniana, que contém novas implicações sobre o verdadeiro comportamento da Natureza.

MATERIAIS E MÉTODOS OU METODOLOGIA

Nosso trabalho teve suas ações pautadas em pesquisa bibliográfica, considerando o fato de que o tema em estudo não é usualmente apresentado nos cursos de graduação, a saber as Equações de Maxwell escritas em uma linguagem tensorial, considerando a métrica de Minkowski.

Assim, levanteremos alguns aspectos básicos que estamos desenvolvendo sobre o tema e que permitirá no decorrer do trabalho atingirmos nosso objetivo. Para tanto, desenvolvemos estudos e discussões dos assuntos que norteiam o referencial teórico com o orientador e com os integrantes do grupo Física no Campus.

Tais estudos são sistematizados como segue:

Como é sabido, o princípio da Covariância Galileana, é um princípio de relatividade, que afirma que as Leis fundamentais da Mecânica são iguais em todos os referenciais inerciais, e estes são conectados pelas transformações de Galileu. Verificaremos agora, se este princípio é realmente válido para as Leis fundamentais da Mecânica Clássica.

As três Leis fundamentais da Mecânica Clássica são:

1. Existem referenciais os quais se movem a uma velocidade relativa nula ou constante. Estes referenciais são ditos inerciais
2. Nos referenciais inerciais é válida a seguinte relação:

$$\mathbf{f} = m\boldsymbol{a} \quad (1)$$

3. Se em referenciais inerciais, a força atuante sobre um sistema é nula, há conservação do momento linear $\boldsymbol{p}$ desse sistema.

Anais do XIV Seminário de Iniciação Científica da Universidade Estadual de Feira de Santana, UEFS, Feira de Santana, 18 a 22 de outubro de 2010

Podemos ainda acrescentar a estas, a Lei da Gravitação Universal de Newton que descreve a interação entre corpos massivos.

$$\vec{f} = G\frac{m_1 m_2}{||\vec{r}||^3}\vec{r} \tag{2}$$

as grandezas físicas envolvidas nessas equações dispensa apresentações. Com as Leis estabelecidas, iniciaremos.

Num referencial inercial $S(x,t)$, temos

$$f = m\ddot{x} \tag{3}$$

para sabermos como esta Lei se apresenta num outro referencial inercial $S'(x',t')$, com velocidade relativa V com relação ao $S(x,t)$, utilizamos a seguinte Transformação de Coordenadas:

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases} \tag{4}$$

dita Transformação de Galileo (T.G.).

Pela (4), e lembrando que ser um referencial inercial implica que $\dot{V} = 0$, temos

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \dot{x} - \dot{V}t - V \\ \dot{x}' &= \dot{x} - V \qquad (5) \\ \ddot{x}' &= \ddot{x} - \dot{V} \\ \ddot{x}' &= \ddot{x} \qquad (6) \end{aligned}$$

ou seja, o vetor aceleração é covariante segundo as T.G.. Como a massa m é uma característica intrínseca de um corpo, esta não deve depender do referencial, logo $m' = m$. Com isso, conclui-se que:

$$m'\ddot{x}' = m\ddot{x} \tag{7}$$

a segunda Lei fundamental da Mecânica assume a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

Se num referencial inercial $S(x,t)$ o momento linear é conservado, em qualquer outro referencial inercial também haverá conservação do momento linear.

Prova:

Descrevendo um sistema de duas partículas de massas m_1 e m_2 num referencial $S'(x',t')$, temos pelo princípio de conservação do momento linear,

$$m_1' v_1' + m_2' v_2' = m_1' w_1' + m_2' w_2' \tag{8}$$

Pela T.G.

$$\begin{cases} v_j' = v_j - V \\ w_j' = w_j - V \end{cases} \quad ; \quad j = 1 \text{ ou } 2 \tag{9}$$

Um referencial $S(x,t)$ com velocidade relativa V ao referencial $S'(x',t')$, observará

$$m_1(v_1 - V) + m_2(v_2 - V) = m_1(w_1 - V) + m_2(w_2 - V)$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \tag{10}$$

que é o Princípio de Conservação do Momento Linear.

A Lei da Gravitação Universal de Newton também é covariante por T.G., uma vez que distâncias são invariantes por T.G..

Prova:

Num sistema de referência $S(x, y, t)$ a norma de um vetor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ é dada por,

$$||\vec{r}_2 - \vec{r}_1|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{11}$$

Segundo as T.G.,

$$\begin{cases} x' = x - V_x t \\ y' = y - V_y t \end{cases} \tag{12}$$

a norma deste vetor, vista dum referencial $S'(x', y', t')$ será,

$$\begin{aligned} ||\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|| &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} && (13) \\ &= \sqrt{(x_2 - V_x t - x_1 + V_x t)^2 + (y_2 - V_y t - y_1 + V_y t)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= ||\vec{r}_2 - \vec{r}_1|| && (14) \end{aligned}$$

No que tange ao campo eletromagnético, no domínio clássico, sua teoria foi formulada matematicamente por James C. Maxwell durante o século XIX em quatro Leis fundamentais, que descreve toda a dinâmica de partículas carregadas.Tais Leis, intituladas Equações de Maxwell são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \tag{15}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{16}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \tag{17}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D} \tag{18}$$

e para completar, é ainda necessário mencionar o Força de Lorentz,

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{19}$$

As Equações de Maxwell, no vácuo, assumem uma forma simétrica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{20}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{21}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \tag{22}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_o \mu_0 \partial_t \vec{E} \tag{23}$$

e que implicam em equações de onda para o campo elétrico e magnético,

$$\Box\vec{E} = 0 \tag{24}$$

$$\Box\vec{B} = 0 \tag{25}$$

sendo $\Box$ o operador D'Alembertiano.

Como objetivamos escrever as equações de Maxwell no espaço de Minkowski, considerando sua forma covariante, mostramos no nosso trabalho que sob a transformação de Galileu as equações de Maxwell, ou as equações de onda associadas, não mantém suas formas. As equações da onda eletromagnética vista num referencial S(x; y; z; t), quando submetidas à uma certa Transformação de Galileu, passando assim para um referencial S'(x'; y'; z'; t') com velocidade relativa V ao longo do eixo Ox assumem a forma:

$$\Box'\vec{E}' - \frac{V}{c^2}\left(V\partial_{x'x'}\vec{E}' - 2\partial_{t'x'}\vec{E}'\right) = 0 \tag{26}$$

Ou seja, concluimos que as Equações de Maxwell não são covariante por Transformações Galileanas. Isto é um grande problema para a Física do século XIX e é o objetivo de nosso trabalho investigar a solução para esse problema.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A incompatibilidade entre a Mecânica Newtoniana e o Eletromagnetismo, nos semeia a idéia de construção de uma nova Mecânica, covariante sob a luz das transformações que deixam o Eletromagnetismo covariante. Estas transformações são chamadas Transformações de Lorentz e implicam no surgimento de uma nova cinemática, a chamada Cinemática Relativística, onde tanto espaço como tempo assumem um caráter dependente do referencial. Estas apontam também para a necessidade de construção de um novo espaço, de geometria hiperbólica, onde os elementos: quadri-vetores se relacionaram de forma a criar uma nova dinâmica. Como demonstramos na seção anterior, devemos investigar essa nova cinemática, que é um tema pouco estudado nos cursos de graduação de Física.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A incompatibilidade da Mecânica Newtoniana com o Eletromagnetismo, provoca a necessidade do desenvolvimento da Mecânica Relativística, chamada também de Relatividade Especial ou Relatividade Restrita. A síntese de nossas conclusões podem se resumir a duas Leis fundamentais, que constituem a base da Relatividade; são elas:

1. As Leis da Física assumem a mesma forma em todos os referenciais inerciais.
2. A velocidade da luz no vácuo, c, é um invariante.

Estes que são os dois postulados formulados por Albert Einstein no início do século XX. Tais postulados implicam em um novo paradigma, onde não há sentido em segregar espaço e tempo, e onde ambos são dependentes do referencial.

REFERÊNCIAS

ASSIS e PESSOA, 2006. Experimento do Balde e Espaço Absoluto: O espaço e o tempo são absolutos ou relativos?, Filosofia da Física Clássica, USP;

BERGMANN, PETER GABRIEL. Introduction to the theory of relativity. New York. Sem data;
ISAAC NEWTON, 1983. Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, Coleção Os Pensadores, Editora Abril Cultural;
PATRICIA M. Schawrz, John H. Schawrz, 2004. Special Relativity: From Einstein to Strings, Cambridge University Press.